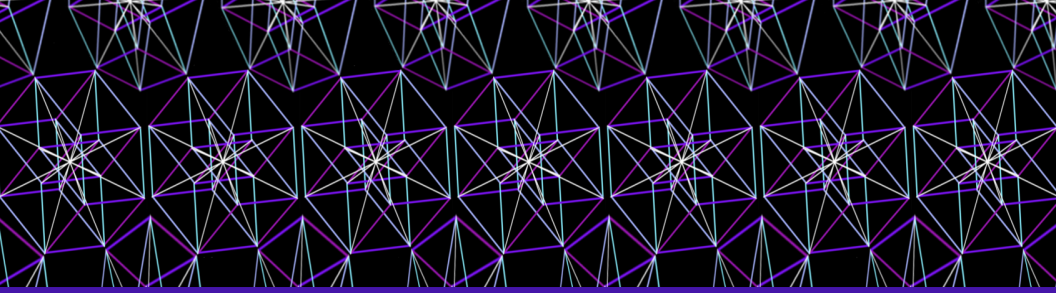


Licence, Master et Écoles d'ingénieurs

RELATIVITÉ RESTREINTE

Approche géométrique

Cours et exercices corrigés

suivi de la conférence
Les voyages interstellaires et l'antimatière

Mathieu ROUAUD

SCIENCE ET DÉCOUVERTES

RELATIVITÉ RESTREINTE

Approche géométrique

Cours et exercices corrigés

suivi de la conférence
Les voyages interstellaires et l'antimatière

Mathieu ROUAUD

Professeur Agrégé de Sciences Physiques
en classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs
Diplômé en Physique Théorique

Vous êtes libres :

de reproduire, distribuer et communiquer cette création au public ,

de modifier cette création .

Selon les conditions suivantes :

Attribution. Vous devez citer le nom de l'auteur original de la manière indiquée par l'auteur de l'œuvre ou le titulaire des droits qui vous confère cette autorisation (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'œuvre).

Pas d'utilisation commerciale. Vous n'avez pas le droit d'utiliser cette création à des fins commerciales.

Parution : septembre 2020 ISBN 978-2-9549309-2-3

Édition 1.3 Révision : octobre 2021

Livre disponible sur lulu.com

Pour contacter l'auteur : ecrire@voyagepourproxima.fr

Avant-propos

La relativité restreinte, présentée dans l'article publié par Albert Einstein en juin 1905, a profondément modifié nos concepts physiques.
Les théories bien établies de l'époque, l'ancienne mécanique de Newton et la toute nouvelle théorie de l'électromagnétisme de Maxwell, étaient fondamentalement incompatibles. Dans la première il y a addition des vitesses alors que dans la seconde une vitesse invariante s'impose : celle de la vitesse de la lumière dans le vide. Dans la théorie de Newton, dans la ligne de la relativité du mouvement introduite par Galilée, la vitesse d'un objet dépend du référentiel d'observation, alors, comment celle de la lumière dans le vide pourrait être une constante fondamentale fixe ?
Pour des référentiels d'inertie, la relativité restreinte réconcilie mécanique et électromagnétisme, au prix d'une remise en cause du caractère absolu de l'espace et du temps. Espace et temps maintenant relatifs forment un nouvel absolu : l'espace-temps.
Les théories de la matière et de la lumière sont ainsi unifiées dans leur cadre spatio-temporel naturel.
L'approche historique d'Albert Einstein s'appuie sur la constance de la vitesse de la lumière dans le vide.
L'approche moderne, qui a permis de construire le Modèle Standard, s'appuie sur une autre logique : les symétries.

Cette nouvelle approche est plus profonde et s'affranchit du biais historique du début du XXe siècle. La structure de l'espace-temps impose une vitesse limite. Cette vitesse maximale est spécifique à l'espace-temps et n'est pas liée à un objet matériel. Cette nouvelle constante est propre au contenant, l'espace-temps, et non au contenu, par exemple, les rayons lumineux. Cette nouvelle vision est conceptuellement très différente et nous éclaire sur la véritable nature des lois physiques.

Dans cet ouvrage, nous mettons l'accent sur des méthodes visuelles et graphiques qui permettent de développer une compréhension sans l'utilisation systématique d'équations. Cette approche géométrique sera mise en avant et permettra au lecteur de donner du sens aux équations qui suivront.

Le cheminement suivi n'est pas académique, mais pragmatique et utilitaire. Dès les premières pages vous maîtriserez des outils qui vous permettront d'appliquer la relativité restreinte de manière autonome.

Nous n'étudions pas ici la relativité générale. Nous le précisons car la confusion est fréquente entre les deux théories. Ceci dit, pour celui qui désire appréhender la relativité générale, il faut d'abord avoir bien compris la restreinte. La relativité générale traite de la gravitation et s'appuie sur des principes qui lui sont propres. Petite exception notable, nous ferons parfois des analogies avec le trou noir pour aider à bien délimiter les deux théories.

Table des matières :

1 Dilatation du temps et contraction des longueurs

- Unités de temps et de distances 1
- Référentiels 3
- Les postulats d'Einstein 4
- Le triangle des temps 8
- La contraction des longueurs 12
- Effet de perspective spatio-temporel 14
- L'expérience des jumeaux 17
- Mise en équations 21
  - Transformation des volumes et des angles

Exercices 25

Les cristaux de l'exolune Pop 25 / Aller simple pour Sirius 26 / Livraison de colis 26 / Jumeau en route pour Sirius 26 / Cruel dilemme ? 27 / Les muons 28 / Voyage en TGV 29 / Satellite 29 / Expérience de Hafele et Keating 30.

2 Diagrammes d'espace-temps

- Ligne d'Univers 35
- Diagramme de Minkowski 36
- Mise en équations 41
  - Équation des lignes d'univers
  - Angle et facteur d'échelle

Exercices 45

Tracé de diagrammes 45 / Communications interstellaires 45 / Appel au secours 46 / Tim, Tam, Tom 46.

3 Changement de référentiel

- Diagramme d'espace-temps 49
- Relativité de la simultanéité 52
- Le principe de causalité 54
- Composition des vitesses 59
- Mise en équations 61
  - Transformation de Lorentz
    - L'invariant de Lorentz
  - Transformation de l'accélération

Exercices 71

Composition des vitesses 71 / Deux vaisseaux 71 / Limite des faibles vitesses 72.

4 L'APPARENCE DES CHOSES 75

ꝏ L'EFFET DOPPLER 76

ꝏ PHOTO D'UNE RÈGLE MOBILE 79

ꝏ LE CIEL ÉTOILÉ VU DU VAISSEAU 84

Exercices 95

Le physicien suicidaire 95 / Voile propulsée par laser 95 / Mélasse optique 96 / Détection d'exoplanètes par effet Doppler 98 / Calculs pour la règle mobile 100 / Aberration de la lumière 101 / Transformation des vitesses et des accélérations en 3D 101 / Ciel étoilé à mi-parcours - Magnitude 102 / Simulation numérique du ciel 104 / Un peu de maths... 105 / Répartition de l'énergie 106 / Nombre de photons 107 / Puissance émise par une étoile 108.

5 LE MOUVEMENT ACCÉLÉRÉ

ꝏ ÉTUDE D'UN RÉFÉRENTIEL ACCÉLÉRÉ 111

ꝏ PESANTEUR ARTIFICIELLE 114

∘ Notion d'horizon 121

ꝏ VOYAGE ALLER-RETOUR 122

∘ La fusée photonique 124

Exercices 129

Mi-temps 129 / Téléréalité - Effet Doppler pour un référentiel accéléré 129 / Face-à-face 131.

6 Métriques

- Métrique Euclidienne 135
- Métrique sur une sphère 138
- Métrique de Minkowski 143
- Métrique du référentiel accéléré 143
- Métrique du référentiel en rotation 149
- Métrique de Schwarzschild 156

Exercices 159

Métrique euclidienne 159 / Rapidité 159 / Métrique de Rindler 159 / Chute d'un objet dans la fusée - Lagrangien - Trou noir 160 / Chute d'une boule bleue 167 / Trajectoire des rayons lumineux dans l'ascenseur d'Einstein 167 / Les coordonnées sphériques - Angles solides 169

7 QUADRIVECTEURS 173

ꝏ ESPACE VECTORIEL D'EUCLIDE 178

ꝏ ESPACE VECTORIEL DE MINKOWSKI 184

ꝏ CHANGEMENT DE COORDONNÉES 199

ꝏ LE QUADRIVECTEUR VITESSE 206

ꝏ LE QUADRIVECTEUR ACCÉLÉRATION 212

ꝏ ÉQUIVALENCE MASSE-ÉNERGIE 219

- Le quadrivecteur énergie-impulsion
- La 4-force

Résumé 227

ꝏ RÉFÉRENTIELS NON-INERTIELS 229

- Bases locales et connexions
- Dérivée covariante
- Géodésiques
- Effets métriques et forces d'inertie

Conclusion et synthèse 239

Exercices 243

Changement de base 243 / Tenseur de courbure de Riemann 243 / Disque en rotation non uniforme 245 / Courbures spatiales 246 / Création de paires 248 / Équation de propagation 249 / Équation de Schrödinger 250 / Le champ électromagnétique 252 / Les équations de Maxwell 255

8 Interactions

Champ créé par une charge 261

- Forces entre deux charges

Rayonnement d'une charge 266

- Puissance rayonnée
- Force de freinage

Les potentiels retardés 268

- Construction géométrique du 4-potentiel

Exercices 273

Unités 273 / Équation du mouvement relativiste 273 / Quadriforce de freinage 274 / Intensité du quadri-potentiel 274

9 Les voyages interstellaires et l'antimatière

- Introduction 277
- Les sondes *Voyager* 281
- L'effet de fronde 283
- Le projet Voyager 3 286
- La loi de l'astronautique 289
- L'antimatière 293
- Jupiter : la pompe à carburant 296
- Le stockage de l'antimatière 298
- Conclusion 303

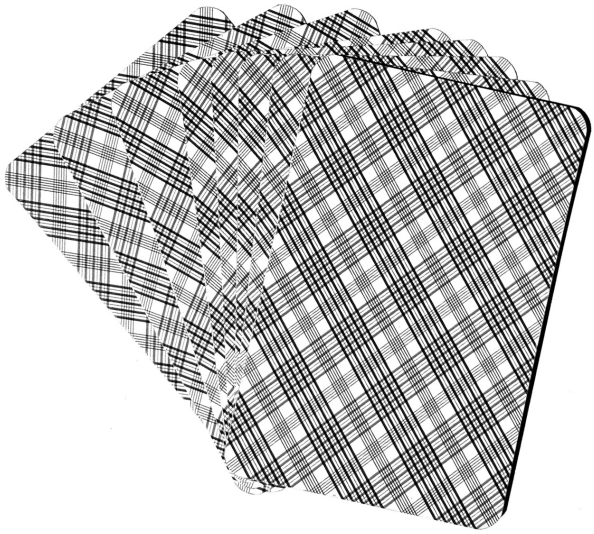
Exercices 305

Chiffres 305 / Évolution de la distance des étoiles 309 / Effet de fronde 309 / Simulations numériques des frondes 313 / Calcul des masses de propergols 320 / Alignements des planètes 321 / Mouvement des étoiles 322 / Paire de trous noirs primordiaux 329 / Collisions d'antiprotons 330 / Le mouvement hélicoïdal 330 / La magnétosphère 331 / Piège de Penning 333.

Corrections 337

Biblio 513

Index 514



1

DILATATION DU TEMPS ET CONTRACTION DES LONGUEURS

Nous introduisons dans ce chapitre la relativité restreinte et nous présentons le premier outil géométrique : le triangle des temps.

UNITÉS DE TEMPS ET DE DISTANCES

Ces deux grandeurs physiques, le temps et la distance, sont de natures différentes. Impossible, par exemple, de dire si une seconde est plus grande ou plus petite qu'un mètre, ça n'a aucun sens.
Nous pouvons utiliser une vitesse pour relier une distance à un temps, or la vitesse dépend de l'observateur ; ce lien serait donc parfaitement arbitraire. C'est toujours vrai en mécanique classique, mais en relativité restreinte nous avons une nouveauté, nous avons une vitesse invariante : la vitesse maximale. Cette constante fondamentale permet d'associer sans ambiguïté une distance à un temps. Cette distance est nommée le *temps-lumière*.
Par exemple, l'année-lumière correspond à la distance parcourue dans le vide par la lumière pendant une année.
La vitesse de la lumière dans le vide vaut environ un

milliard de km/h, elle est nommée *c* et est précisément fixée à :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

C'est la vitesse de toute onde électromagnétique dans le vide, que ce soient les ondes radios, infrarouges, visibles, ultraviolettes, les rayons X ou les rayons gamma.
Nous précisons bien, dans le vide, car dans un milieu matériel transparent, comme l'air, l'eau ou le verre, la vitesse est plus faible et dépend de la longueur d'onde.
Une année-lumière, notée a.l., vaut environ 10 000 milliards de km. L'étoile la plus proche de notre Soleil, Proxima du Centaure, est situé à environ 4 al. Notre Soleil est à 8 minutes-lumière de la Terre, la Lune à une seconde-lumière et un humain adulte mesure entre 5 et 6 nanosecondes-lumière :

$$1 \text{ ns.l.} \simeq 33 \text{ cm}$$

Nous pouvons maintenant comparer librement des distances et des temps, en exprimant les distances en unités de temps-lumière.

∞ RÉFÉRENTIELS

Toute mesure d'une grandeur physique s'effectue dans un référentiel donné.
La grandeur peut être un temps, une distance, une vitesse, une accélération, une force, etc.
Le référentiel, comme en mécanique Newtonienne, est défini par un solide de référence considéré fixe.
Par exemple, un train peut être pris comme référence. Plus précisément un wagon de ce train permet de situer tout objet. On considère, arbitrairement, un point du wagon comme origine. Ensuite, de ce point, nous décomptons de combien de reports d'une règle rigide d'un mètre nous devons nous déplacer selon la direction avant-arrière, droite-gauche et haut-bas pour atteindre cet objet. Nous obtenons un jeu de trois nombres qui définit la position de l'objet de manière unique. Si l'objet est fixe ce sera suffisant, mais si celui-ci se déplace, il faudra aussi définir une date. Nous avons alors un jeu de quatre nombres appelé événement :

$$E\ (x, y, z, t).$$

Pour la date, nous devons procéder plus précisément qu'en mécanique classique. Le temps n'est plus absolu, et au lieu d'une seule horloge nous devons disposer d'un ensemble d'horloges synchronisées sur tout l'espace.
Suivant les cas, nous pouvons utiliser le référentiel terrestre, le référentiel héliocentrique, le référentiel galactique, etc.

Ces référentiels sont en mouvement les uns par rapport aux autres et pour le même événement nous aurons des jeux de coordonnées différents.

∞ Les postulats d'Einstein

Albert Einstein postule dans son article de juin 1905[1] que les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie (1er postulat), et que dans ces mêmes référentiels la vitesse de la lumière dans le vide est invariante (2em postulat).

En mécanique Newtonienne, pour l'énoncé des trois lois de Newton, nous ne parlions pas de référentiels d'inertie mais de référentiels galiléens, ce qui revient au même. Par exemple, en mécanique classique, dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen, la deuxième loi de Newton n'est plus vérifiée et de nouvelles forces, appelées d'inertie, apparaissent. Un référentiel en rotation par rapport à un référentiel d'inertie n'est donc pas d'inertie.

Comment définir un référentiel d'inertie ?
Un référentiel est d'inertie si les postulats sont vérifiés.
Le plus simple est d'avoir un référentiel d'inertie de référence, ensuite tous les référentiels en translation rectiligne et uniforme par rapport à ce premier référentiel sont aussi d'inertie.

---

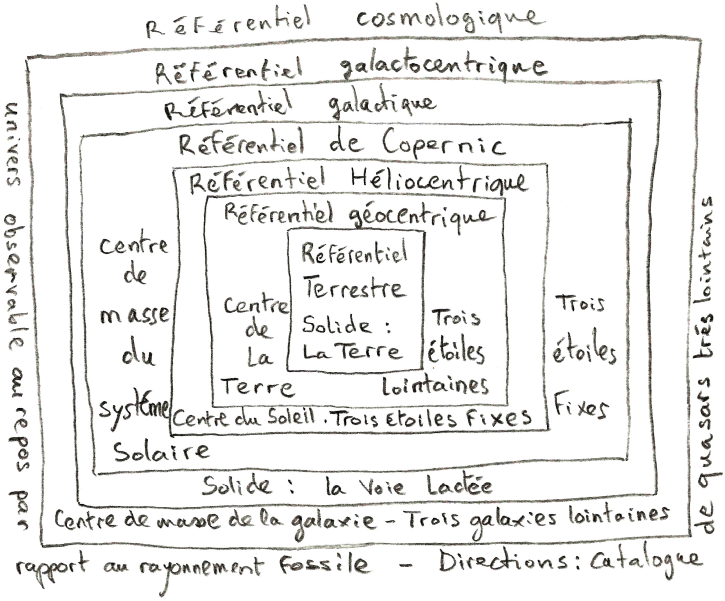
1 "*De l'électrodynamique des corps en mouvement.*" traduction en français sur le site de l'Université du Québec à Chicoutimi.

Plus nous pointons un objet éloigné de nous, comme une étoile lointaine, plus son mouvement peut être négligé. Par exemple, des quasars extrêmement massifs et très lointains, à plusieurs milliards d'années-lumière, sont pris comme points fixes et permettent de définir le référentiel cosmologique de référence. Le rayonnement fossile, émis 380 000 ans après le Big Bang, il y a 13,8 milliards d'années, est homo-gène et isotrope dans ce référentiel.

Pour revenir à notre train, si celui-ci roule en ligne droite et à vitesse constante dans le référentiel terrestre, le référentiel du train peut être considéré comme d'inertie pour une expérience de quelques minutes. Cette durée est faible devant celle de la rotation de la Terre sur elle-même. Il s'agit d'une bonne approximation, et le référentiel terrestre peut être, ici, considéré d'inertie. Plus les mesures seront précises plus la durée de l'expérience devra être courte pour que l'approximation reste valide.

Pour un satellite, le référentiel terrestre n'est plus d'inertie. Un satellite basse altitude fait le tour en 1 heure 30 minutes, durée non négligeable devant la rotation propre de la Terre qui dure environ 24 heures. Nous considérons alors le référentiel géo-centrique, d'origine le centre la Terre, et dans lequel la Terre est en rotation propre par rapport aux étoiles lointaines supposées fixes.

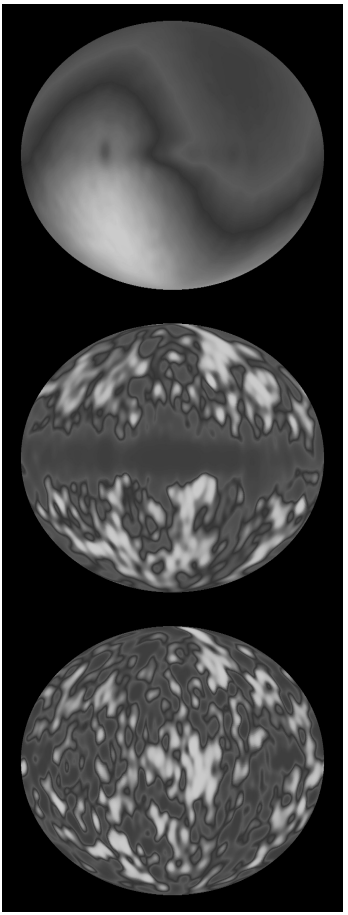
Dans un référentiel d'inertie, un objet soumis à aucune force, va en ligne droite à vitesse constante.



Impossible de positionner et dater un événement sans points de repère. Si vous cachez un trésor vous indiquerez sa position par rapport à un point d'origine : par exemple, «depuis le chêne centenaire, 22 pas vers l'ouest, 47 vers le sud et creusez à trois pieds.» Si je dis que je suis né en 1992, c'est en référence à une date origine, posée arbitrairement comme repère commun.

Un référentiel est associé à un solide auquel on ajoute une chronologie. Au minimum, quatre objets fixes l'un par rapport à l'autre sont nécessaires. Pour la chronologie, en relativité restreinte une seule horloge n'est plus suffisante : on peut imaginer un solide constitué de barres rigides de longueur unité, toutes placées perpendiculaires les unes aux autres afin de former un réseau tridimensionnel, et à chaque nœud de ce réseau on place une horloge ; toutes les horloges sont synchronisées, et l'ensemble forme ce qu'on appelle un cristal d'horloges.

L'objet le plus vaste dans l'Univers, est l'Univers lui-même. Utilisons-le comme solide de référence. En cosmologie, l'Univers peut être vu comme un fluide de galaxies qui s'étend partout : tout point de l'Univers peut être considéré au centre. Mais, deux remarques : tout d'abord l'Univers ne peut être observé dans son ensemble, car plus on regarde loin, plus on remonte dans le temps. Le plus ancien objet visible est le rayonnement fossile émis il y a 13,4 milliards d'années quand l'Univers est devenu transparent. Ensuite, si nous prenons un point où ce rayonnement fossile est uniforme, tout nous amène à penser que ce point est immobile par rapport à l'Univers.



Ci-contre, les données recueillies par le satellite COBE sur le fond diffus cosmologique.
Sur la première image nous visualisons l'anisotropie due au déplacement de la Terre par rapport au référentiel cosmologique, cela est dû à l'effet Doppler et on évalue ainsi une vitesse de 350 km/s.
Sur la deuxième image, nous avons la lumière parasite de notre propre galaxie.
Finalement, tout en bas, nous, obtenons une image de l'Univers à ses débuts : il est homogène dans le référentiel cosmologique et nous pouvons utiliser des quasars pour les directions.

Ainsi s'emboîtent les référentiels : pour la sonde *Voyager* nous considérons le référentiel de Copernic, qui a pour origine le centre de masse du système solaire et pour directions des étoiles lointaines. Pour un voyage interstellaire vers Proxima du Centaure nous considérerons le référentiel galactique. En effet, sur un voyage de quelques années ou décennies, la Voie lactée et ses étoiles peuvent être supposées fixes ; par exemple, notre galaxie tourne sur elle-même en quelque 250 millions d'années, durée bien supérieure à celle de notre voyage vers les étoiles[2].

∞ Le triangle des temps

Il n'y a pas un temps absolu, unique et universel. Les temps sont multiples et relatifs. Chaque observateur, ou objet, vit un temps qui lui est propre. Les temps sont pluriels, chaque temps suit son cours, et, lorsqu'on les compare, on constate qu'ils évoluent à des rythmes différents. Ces rythmes seront d'autant plus différents que la vitesse relative entre deux référentiels d'inertie sera grande. Pour chaque référentiel d'inertie nous pouvons définir un temps unique pour un ensemble d'objets immobiles les uns par rapport aux autres.

Nommons *R* un tel référentiel d'inertie. Considérons une point fixe $M_1(x_1, y_1, z_1)$ dans *R*. En ce point, deux

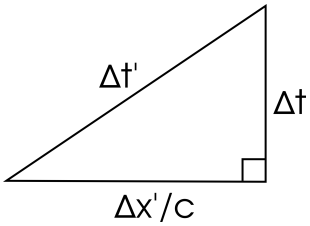
2 Suite de la réflexion sur les référentiels d'inertie dans la conclusion du cours sur les quadrivecteurs.

événements se produisent à la date t_1 puis t_2 :

$$E_1(x_1, y_1, z_1, t_1) \quad \text{et} \quad E_2(x_2=x_1, y_2=y_1, z_2=z_1, t_2).$$

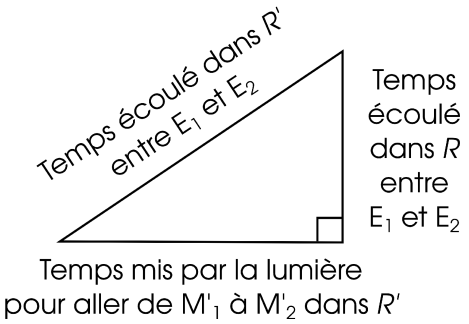
Par exemple, une lampe qui s'allume puis s'éteint. Deuxième exemple, dans le cas d'un voyage interstellaire, prenons pour *R* le référentiel d'une fusée, t_1 correspond à la date de départ depuis le système solaire, et t_2 indique la date d'arrivée aux abords de Proxima du Centaure. Dates mesurées sur une horloge fixe par rapport à la fusée.
La durée entre les deux événements vaut $\Delta t = t_2 - t_1$.
Si maintenant nous mesurons les quatre coordonnées de ces deux événements depuis un deuxième référentiel d'inertie *R'*, en mouvement de translation rectiligne et uniforme à la vitesse $\vec{v}$ par rapport à *R*, nous mesurons une deuxième durée $\Delta t' = t'_2 - t'_1$.
Du point de vue de *R'*, les événements E_1 et E_2 ont pour coordonnées spatio-temporelles (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) et (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2), et se produisent maintenant en deux points distincts $M'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ et $M'_2(x'_2, y'_2, z'_2)$.
La première durée Δt est appelée *temps propre*, car les événements sont au repos dans *R* ; la deuxième durée $\Delta t'$ est appelée *temps relatif*, car les événements sont mobiles par rapport à *R'*. Le référentiel *R'* aura parcouru, par rapport à *R*, la distance $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ pendant $\Delta t'$ (cas où les axes des abscisses sont orientés selon $\vec{v}$).

Nous avons alors *le triangle des temps* qui permet de répondre à nombre de nos questions :



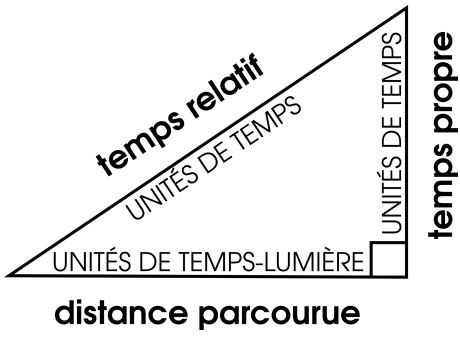
Nous utilisons ce triangle comme point de départ pour construire la relativité restreinte. Plus tard nous pourrons démontrer sa validité en utilisant les postulats d'Einstein ou les symétries.

Chaque côté du triangle correspond à un temps distinct :

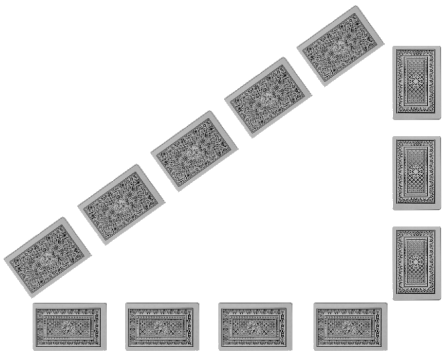


Nous pouvons le mémoriser sous la forme suivante :

Le triangle des temps



Le triangle de temps est facile à retenir et à appliquer. Prenons le cas d'un voyage interstellaire Soleil - Proxima du Centaure et utilisons un jeu de cartes pour résoudre le problème.
La base du triangle rectangle correspond à la distance en années-lumière. Nous plaçons une carte par année-lumière, d'où, ici, quatre cartes. Ensuite, nous plaçons verticalement le nombre de cartes qui correspondent à la durée du voyage pour les astronautes, une carte par année.
Décidons d'effectuer le voyage en trois ans, mesure effectuée avec une horloge au repos dans le référentiel du vaisseau.
Combien de temps aura duré le voyage mesuré depuis le référentiel galactique ? C'est simple nous décomptons le nombre de cartes nécessaires pour l'hypoténuse :



Le temps relatif vaut 5 ans et le temps propre 3 ans. Le triangle des temps permet de visualiser directement la *dilatation du temps* : $\gamma = \Delta t' / \Delta t$. Ici, le facteur gamma vaut 5/3.

La vitesse du vaisseau vaut dans R' : $v = \Delta x' / \Delta t'$. Ici, la vitesse est de 4/5 de la vitesse limite soit 80% de c. Comme l'hypoténuse est le plus grand des côtés, le temps ne peut que se dilater et la vitesse de la lumière dans le vide ne peut être dépassée.

Les deux premiers exercices page 25 permettent de se familiariser avec ces notions.

La contraction des longueurs

Nous avons précédemment envisagé un voyage du Soleil à Proxima qui dure 3 ans pour les spationautes. Nous pourrions nous interroger : «Le vaisseau met trois ans alors que la lumière en met quatre ans, on va donc plus vite que la lumière ! ?» Question qui revient régulièrement chez les étudiants au moment de l'introduction à la relativité restreinte.
Ce n'est bien sûr pas le cas. Il faudrait plutôt reformuler les choses ainsi : si un observateur terrestre envoie une impulsion lumineuse avec un laser, celui-ci devra attendre que son horloge indique quatre ans écoulés avant que le rayon n'atteigne Proxima du Centaure ; alors qu'un observateur qui voyage à 80% de c devra attendre que son horloge indique trois ans écoulés avant de rejoindre Proxima. Et l'observateur terrestre observera bien le vaisseau arriver après le rayon, de même que l'astronaute parti en même temps que le rayon ne le dépassera jamais. Pour être logiques tous les raisonnements doivent être effectués dans un référentiel fixé. Si on

change de référentiel, on change de point de vue, et il faut repenser la situation.

Tout d'abord, pour mesurer une vitesse dans un référentiel donné, il faut diviser une distance par un temps, en prenant garde que les deux grandeurs soient mesurées dans ce même référentiel.

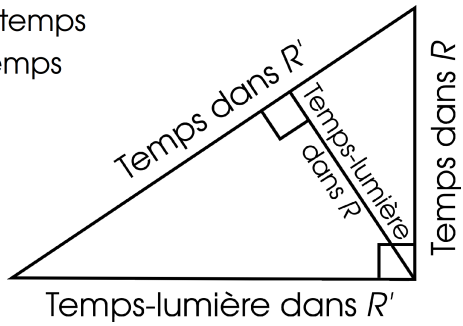
Dans la question posée par l'étudiant, il divise une distance mesurée dans le référentiel galactique par un temps mesuré dans le référentiel du vaisseau. Ça n'a pas de sens[3], la grandeur obtenue ne correspond pas à la vitesse d'un objet.

La réponse, à cet apparent paradoxe, est que la distance Soleil - Proxima mesurée depuis le référentiel du vaisseau n'est pas de 4 a.l, la longueur est contractée et vaut moins de 3 al.

Le facteur de contraction des longueurs est égal au facteur de dilatation du temps.

Avons-nous l'équivalent du triangle des temps ?

Pas vraiment, car, si l'on cherche à construire un triangle des longueurs, un des cotés ne correspond pas à une grandeur physique, directement mesurable. Par contre, nous pouvons ajouter un quatrième temps dans le triangle des temps qui correspond au temps mis par la lumière mesuré dans le référentiel *R* :



3 La discussion sera prolongée et approfondie au moment de l'étude des quadri-vecteurs et de la quadri-vitesse.

Tous les triangles sont dans les mêmes proportions, et le temps-lumière mesuré dans *R* est le plus court.
La distance Soleil - Proxima mesurée depuis le vaisseau est de 2,4 al.

∞ Effet de perspective spatio-temporel

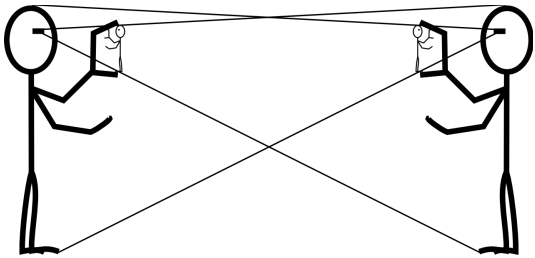
Supposons que le cœur du spationaute batte à 60 battements par minutes. Si la dilatation temporelle est de deux, du point de vue des observateurs sur Terre, son cœur bat plus lentement, une fois toutes les deux secondes. Et si pour un autre observateur le gamma vaut trois, il y aura un battement toutes les trois secondes selon ce dernier. Mais il va de soi que le spationaute, a de son point de vue, son cœur qui bat tout à fait normalement, une fois par seconde. Son référentiel est d'inertie comme pour les deux autres observateurs.
Aussi, de par la relativité du mouvement, le spationaute qui observe les habitants de la Terre aura l'impression d'un ralentissement symétrique.
Il est à noter que ce ralentissement des horloges est le même que l'on s'éloigne ou que l'on se rapproche. Ce phénomène est de nature différente de l'effet Doppler, où, quand un émetteur se rapproche, le signal reçu est de fréquence plus élevée, et quand l'émetteur s'éloigne, il est plus grave.
Une confusion classique consiste à confondre ce que l'on voit avec ce qui est. Quand vous regardez une étoile, vous voyez la lumière qu'elle a émise de

nombreuses années auparavant, possible qu'elle ne soit plus à cet endroit, ou même n'existe plus. Pourtant spontanément quand on regarde le ciel étoilé on se sent unis au cosmos, là et maintenant. Cette illusion provient de nos habitudes quotidiennes dans un monde où la vitesse maximale est très élevée par rapport à nos mouvements routiniers. On peut supposer la propagation de la lumière instantanée, on voit ce qui est. Si la vitesse limite était de 10 km/h, nous serions habitués à ces différences. Souvent on s'imagine regarder, à l'œil nu ou avec un télescope terrestre, le spationaute dans son vaisseau s'éloigner et effectuer ses mouvements au ralenti, mais cette expérience de pensée est fausse, il ne s'agit pas de ça.

On ne «voit» pas, on mesure avec le cristal d'horloges. La première fois qu'on l'appréhende, l'approche peut sembler quelque peu conceptuelle, mais avec l'habitude ça devient *naturel*, et on arrête de dire que l'on *voit* les horloges ralentir. Il faut avoir en tête les deux référentiels d'inertie telles des maillages, l'un immobile, et l'autre en mouvement, et imaginer les deux événements successifs et les dates enregistrées localement par chacun des cristaux d'horloges synchronisées.

Ceci dit, nous pouvons faire des analogies avec les effets de perspective spatiaux. Quand on regarde quelqu'un au loin, il est tout petit, on peut le regarder de la tête aux pieds entre deux doigts. Il peut faire de même, c'est symétrique. Il y a contraction des longueurs, et personne n'imagine le

phénomène comme réel, l'autre n'est pas petit comme un schtroumpf.



La contraction à lieu selon toutes les directions.
Un autre effet de perspective qui produit une contraction des longueurs : la rotation. Quand je vous montre un livre de face, puis que je le tourne de 90° selon un axe vertical, vous ne voyez plus que sa tranche, et la couverture à réduit de taille jusqu'à zéro lors de la rotation. L'apparente contraction s'est produite selon l'horizontale seulement.
En relativité restreinte, les deux observateurs, sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, et c'est ce mouvement qui crée simultanément la contraction de longueurs et la dilatation du temps. Les longueurs ne sont contractées que selon la direction de la vitesse relative. Nous rappelons que, à la différence des analogies précédentes, ce n'est pas ce que l'on voit mais ce que l'on mesure.
Contrairement à ce que l'on entend parfois, il ne s'agit pas d'une *rotation* spatio-temporelle. Nous verrons la transformation à effectuer entre les coordonnées (x, y, z, t) de *R* et (x', y', z', t') de *R'* au chapitre *Changement de référentiels*, ce n'est pas une rotation.

L'EXPÉRIENCE DES JUMEAUX

Il s'agit d'une expérience de pensée proposée par Paul Langevin en 1911. Nous espérons qu'un jour nous aurons un vaisseau spatio-temporel pour la réaliser ! À défaut d'être effectuée avec de vrais jumeaux, elle a, pour l'instant, été réalisée avec des horloges atomiques. On parle parfois de *paradoxe* des jumeaux, mais c'est une réalité, pas un paradoxe ; cette dénomination trompeuse provient d'incompréhensions. Langevin, principal défenseur de la relativité en France au début du XX^{e} siècle, n'avait parlé, au congrès de philosophie de Bologne en 1911, ni de paradoxe, ni de jumeaux... mais d'un voyage en boulet à la Jules Verne ! C'est le mathématicien et physicien Hermann Weyl qui parle de jumeaux en 1918. C'est le philosophe Henri Bergson qui consacre un livre entier, publié en 1922, sur la relativité restreinte, qui parle de paradoxe et donne une interprétation erronée de l'expérience.

Expliquons maintenant cette expérience. Nous prenons deux jumeaux au moment où ils fêtent leurs 20 ans sur Terre. Juste après l'anniversaire, ils se quittent, l'un reste sur Terre et l'autre part pour Proxima à 80% de *c*. Selon le triangle des temps, nous avons 5 ans écoulés pour le jumeau resté sur Terre et 3 ans pour celui qui voyage jusqu'à Proxima. Ensuite le jumeau voyageur revient sur Terre, ce qui double les temps. Le jumeau resté sur Terre à maintenant 30 ans et celui qui a fait l'aller-retour 26

ans. Nos jumeaux n'ont plus le même âge.
L'image est marquante car les deux jumeaux peuvent directement comparer leurs deux horloges avec une différence de quatre ans. C'est moins abstrait qu'une mesure via un cristal d'horloges. Les postulats de la relativité restreinte considèrent des référentiels d'inertie. On peut à un moment donné avoir les horloges de deux référentiels différents qui coïncident, mais ensuite elles ne font que s'éloigner l'une de l'autre à vitesse constante. Ainsi l'expérience des jumeaux ne peut se comprendre qu'avec les deux premiers postulats d'Einstein.
Nous constatons un effet cumulatif de la dilatation temporelle sur l'aller-retour, pourquoi pas aussi un effet cumulatif des contractions : un astronaute plus jeune et aplati... !? Le temps et l'espace n'ont pas des natures équivalentes : un mouvement gauche-droite peut-être compensé par un mouvement droite-gauche, pour le temps c'est impossible, il y a le principe de causalité et on ne peut aller que du passé vers le futur, on ne peut qu'avancer dans le temps et les temps propres s'ajoutent.
Avant de conclure sur l'expérience des jumeaux un dernier point. Il ne vous semble pas aberrant que le voyageur parte comme ça à 800 millions de km/h, sous-entendu de manière instantanée ? C'est bien sûr impossible, un physicien ne s'intéresse qu'à des situations physiquement acceptables, il faudrait une énergie infinie et la force due à l'accélération exercée le serait elle aussi. En bref, même si la phase d'accélération durait quelques secondes, on ne

conçoit pas qu'un tel réacteur aussi puissant puisse exister, et les occupants seraient tout bonnement écrasés... Le vaisseau voit en fait sa vitesse augmenter continûment, ce qui peut être modélisé par une succession de référentiels d'inertie de vitesse croissante.
Un nouveau postulat vient compléter la relativité restreinte, c'est l'*hypothèse de l'horloge* qui a été vérifiée expérimentalement :
Deux horloges de même vitesse instantanée *v*, l'une étant accélérée et l'autre pas, subissent le même facteur de dilatation du temps γ.
L'horloge mesure le temps propre et nous ajoutons les temps du voyageur sur l'ensemble de son voyage spatio-temporel aller-retour :

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{dt'}{\gamma}$$

Le temps propre est le temps mesuré par une horloge au repos par rapport au phénomène à étudier. Nous l'avions appelé Δt, mais souvent pour bien insister sur sa particularité nous utilisons la lettre grecque τ. La mesure d'un temps relatif nécessite, elle, deux horloges différentes précédemment synchronisées.
On peut ainsi, sans ambiguïté, faire le calcul du temps propre mis par le voyageur pour l'aller-retour. Calcul fait depuis le référentiel d'inertie galactique *R'*. À noter que si nous faisons le calcul depuis un autre référentiel d'inertie *R''* nous trouverions la même durée propre τ.

Par contre, un calcul direct est impossible depuis le référentiel du vaisseau car celui-ci n'est pas inertiel[4].

Joseph Hafele et Richard Keating, en 1971, vérifient expérimentalement l'«hypothèse de l'horloge», troisième postulat de la relativité restreinte. Avec peu de moyens et beaucoup de persévérance, ils effectuent deux fois le tour du monde, l'un vers l'est, et l'autre vers l'ouest. Ils étaient dans des avions commerciaux avec des horloges atomiques et de nombreux passagers. Au retour, ils comparent avec une horloge restée au sol[5].
Photo : Time Magazine, 18 octobre 1971.

Entraînement : exercices 3, 4 et 5 page 26.

4 On peut faire le calcul du point de vue du référentiel accéléré en utilisant la métrique non-minkonskienne donnée page 143.

5 *L'expérience cruciale de Hafele et Keating* par Pierre Spagnou, pdf, 27 pages, mars 2018.

∞ Mise en équations

Le triangle des temps, page 10, donne par application du théorème de Pythagore :

$$(\Delta t')^2=(\Delta t)^2+\left(\frac{\Delta x'}{c}\right)^2 \quad \text{or} \quad \gamma=\frac{\Delta t'}{\Delta t} \quad \text{et} \quad v=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

$$\text{d'où} \quad (\gamma\,\Delta t)^2=(\Delta t)^2+\left(\frac{v}{c}\gamma\,\Delta t\right)^2 \quad \text{et} \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

on note aussi bêta : $\beta=\frac{v}{c}$ qui exprime la vitesse par rapport à *c*,

Ainsi, nous avons la relation suivante pour gamma :

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Connaître par cœur cette expression du facteur gamma permet de se passer du triangle des temps.

Entraînement : exercices 6 à 9 page 28.

∘ **Transformation des volumes et des angles**

• **Volumes :** Seules les longueurs selon la direction de la vitesse relative entre les deux référentiels sont contractées. Prenons le cas d'un parallélépipède rectangle selon les axes *(Oxyz)* au repos dans *R*, alors si $\vec{v}=v\vec{i}$: $\Delta x'=\Delta x/\gamma$, $\Delta y'=\Delta y$ et $\Delta z'=\Delta z$,

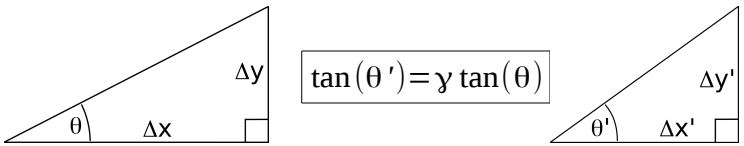
$$\text{d'où :} \quad \boxed{V'=\frac{V}{\gamma}}\,.$$

Relation vraie quelle que soit la forme de l'objet. En effet, tout objet peut être décomposé en volumes infinitésimaux parallélépipédiques chacun contractés du même facteur γ, l'intégrale, somme d'infinitésimaux, l'est donc aussi.
Un cube dans *R* s'aplatit dans *R'* tout en gardant la même section perpendiculairement à $\vec{v}$. Une sphère dans *R* s'aplatit selon la direction de $\vec{v}$ dans *R'*.

Le protocole de mesure d'une distance assure que chaque position de l'objet est mesurée au même instant *t'* dans *R'*.
Ce n'est bien sûr qu'un effet de perspective, rien de physique ici, si par exemple le cube est une boîte qui contient un gaz, celui-ci n'est pas comprimé et aucun risque que celui-ci ne se liquéfie !
Pour ce qui est vu par un observateur s'ajoutent une nouvelle déformation due à la propagation des

rayons lumineux jusqu'au point d'observation. La distance d'un point de l'objet au point d'observation varie et l'objet photographié sur un capteur est constitué de points lumineux qui correspondent à des instants t' différents au niveau de l'objet, les mesures ne sont pas alors simultanées dans R'. Cet aspect plus subtil est abordé dans le chapitre *L'apparence des choses*.

• **Angles :** Soit un triangle rectangle. Un côté de longueur Δx selon $\vec{v}$, et un second perpendiculaire selon y et de longueur Δy. Nous mesurons l'angle θ entre le côté de longueur Δx et l'hypoténuse. Le triangle est au repos dans R et $\tan(\theta)=\Delta y/\Delta x$. Dans R' : $\tan(\theta')=\Delta y'/\Delta x'$. $\Delta x'=\Delta x/\gamma$ et $\Delta y'=\Delta y$ d'où :



Lorsque vous voyez une étoile dans le ciel, vous mesurez sa position à l'aide d'angles. Ces angles sont modifiés par le mouvement de la Terre sur son orbite dans le référentiel galactique. L'angle apparent θ_a sous lequel on voit une étoile n'est pas simplement l'angle θ' car il faut de plus tenir compte de la propagation des rayons lumineux jusqu'à notre télescope. La couleur d'une étoile est aussi modifiée, voir le chapitre *L'apparence des choses* pour plus de précisions.

Exercices

Méthodes de résolution :

- ♥ (Jeu de cartes)
- ◣ (règle, équerre, rapporteur et compas)
- √ (équations)

Difficulté : ▲△△ (simple) / ▲▲△ / ▲▲▲ (complexe)

Données :

Vitesse de la lumière (vide) ≃ 300 000 km/s
Distance Soleil-Proxima ≃ 4 années-lumière
Distance Soleil-Barnard ≃ 6 années-lumière
Distance Soleil-Sirius ≃ 9 années-lumière
Rayon de la Terre ≃ 6 400 km

1. ♥ ▲△△ Les cristaux de l'exolune Pop

En l'année galactique 2110, vous entreprenez le voyage Soleil-Barnard pour y étudier les cristaux de l'exolune Pop. Après huit années passées dans votre fusée, vous vous posez sur Pop. En quelle année galactique sommes-nous alors, et quelle était la vitesse de votre fusée ?

Correction page 337.

2. ♥ ▲△△ Aller simple pour Sirius

C'est décidé, en 2154, pour vos 30 ans, vous partirez pour Sirius avec l'antique vaisseau *β6* de votre ami Zou. Trop envie de changer d'air et d'un nouveau départ. Le vaisseau n'est pas très rapide, mais spacieux et confortable. À quel âge arriverez-vous, et pourrez-vous assister au festival des deux soleils de 2168, ou faudra-t-il attendre celui de 2178 ?

Série Rêve β6 : modèle 2110-2124 / Vitesse 60% de c.

Correction page 337.

3. ♥ ▲△△ Livraison de colis

Votre métier ? La livraison de colis dans la galaxie. Et vous êtes le premier sur le marché car vous avez le *SpaceTruck* le plus rapide !

«*... pour commercer entre le Soleil et Proxima, 4 ans de voyage seulement me sont nécessaires pour l'aller-retour. Et un bénef de 5 millions de Blings, imaginez un peu la tune que j'me fais !!*»

En combien de temps les clients sont livrés, quelle est la vitesse du vaisseau et la dilatation temporelle ?

Corr. p338.

4. ♥ ▲▲△ Jumeau en route pour Sirius

Des jumeaux ont 20 ans en 2132, le plus intrépide part pour Sirius et revient en 2156.

Quels âges ont alors les jumeaux ?

Quelle était la vitesse de la fusée ?

Correction page 338.

5. ◥ ▲▲△ Cruel dilemme ?

Nous sommes en 3021. Denys habite le centre galactique. Il vient de recevoir une nouvelle terrible : lors de son séjour dans le bras spiral de Persée, il a attrapé un virus, il mourra dans exactement 32 ans, et il n'y a aucun remède...
S'ajoute à cela qu'il vient de recevoir un ordre de mission très précis : désamorcer une bombe à rayons gamma située à 26 a.l. avant qu'elle ne détruise la galaxie tout entière, explosion prévue en 3052.
Et surtout, plus important que tout, être là, au centre de la galaxie, pour la grande fête galactique séculaire de 3082 !
Denys dispose d'un vaisseau de gamma égal deux.
Que pouvez-vous proposer à Denys ?

Corr. p339.

√ L'utilisation d'équations est la méthode la plus complète et générale. Néanmoins, nous pensons que son utilisation systématique, dès le début de l'apprentissage, rend difficile une compréhension intuitive des phénomènes. De plus, le langage mathématique à maîtriser bloque inutilement beaucoup de personnes passionnées par la physique.
Les équations sont très pratiques dans les deux cas où le triangle des temps est très étiré : pour des mouvements lents où la vitesse est très faible devant celle de la lumière, ou, au contraire, pour des mouvements rapides où la vitesse est très proche de la vitesse maximale (cas ultra-relativistes).

6. √ ▲▲△ Les muons

Les rayonnements cosmiques sont constitués de particules de grande énergie. Beaucoup de ceux qui frappent l'atmosphère terrestre sont des protons. Ils proviennent du Soleil, de notre galaxie et au-delà. Heureusement pour la vie sur Terre, beaucoup de ces particules sont détruites dans la haute atmosphère et créent des gerbes d'autres particules moins énergétiques. Nous nous intéressons ici au cas des muons ainsi créés. Quand vous êtes au bord de la mer, 170 muons parviennent en moyenne au sol par mètre carré et par seconde. Chaque seconde que vous prenez à lire l'énoncé de cet exercice des dizaines de muons vous traversent.

Les muons ont une demie-vie $t_{1/2}$ de 1,5 micro-secondes. Ce qui signifie que si vous prenez un grand nombre de muons au repos, il n'en restera plus que la moitié après 1,5 µs, et comme ils ne vieillissent pas, plus que le quart après 3 µs, etc.
Prenons l'exemple d'un muon créé à 10 km d'altitude et qui se dirige verticalement vers le sol avec une vitesse de 99,9% de *c*.

Que pensez-vous de la probabilité qu'a ce muon d'arriver au sol (niveau de la mer) ?

Correction page 340.

7. √ ▲▲▲ Voyage en TGV

En 2012, la ligne de train à grande vitesse la plus longue est en Chine et relie Pékin à Canton. Sa longueur est de 2300 km et le temps de parcours de huit heures.
Vous disposez de deux horloges atomiques. Vous les synchronisez, puis, vous en laissez une en gare à Pékin, et, l'autre vous accompagne pour votre voyage aller-retour Pékin-Canton.
Au retour quelle sera la différence de temps entre les deux horloges ?

∘ *Précision des horloges atomiques embarquées : 10^{-14}s/s.*
∘ *Le voyage est considéré à vitesse constante, ce qui donnera une bonne approximation.*
∘ *Un outil mathématique nécessaire ici, un développement limité : si epsilon est très petit devant un,* $\epsilon \ll 1$, *alors* $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1+\alpha\epsilon$. *Ici* $1/\sqrt{1-\beta^2} = (1-\beta^2)^{-1/2} \simeq 1+\frac{1}{2}\beta^2$.

Correction page 341.

8. √ ▲▲▲ Satellite

Soit un satellite basse altitude, comme, par exemple, la Station Spatiale Internationale. Le satellite est placé à 500 km d'altitude et file à 27 000 km/h dans le référentiel géocentrique. Ce référentiel est dans cet exercice considéré d'inertie.
Une horloge est placée dans la station internationale et une deuxième est maintenue

immobile dans le référentiel géocentrique. Les protocoles de synchronisation et de comparaison des temps sont parfaitement respectés.
Quelle est la différence de temps après un tour ?

∘ *Le référentiel du satellite n'est pas d'inertie et nous appliquons l'hypothèse de l'horloge.*
∘ *À la différence de l'expérience de Hafele et Keating, les horloges restent à altitude constante, nous n'avons pas de ce fait à tenir compte des effets de la gravitation.*

Correction page 342.

9. √ ▲▲▲▲ Expérience de Hafele et Keating

Nous allons ici tenter de retrouver les résultats de Hafele et Keating établis en 1971.
Pour un tour du monde vers l'est, ils trouvaient que l'horloge embarquée vieillissait moins d'environ 60 ns par rapport à l'horloge restée au sol, par contre, pour un tour du monde vers l'ouest, l'horloge embarquée vieillissait davantage d'environ 300 ns.
Nous simplifions le problème, un seul avion suffit pour faire le tour du monde. Le vol est équatorial à 10 km d'altitude. L'avion à une vitesse de 1000 km/h par rapport au sol. À l'équateur, le sol se déplace à 1674 km/h par rapport au référentiel géocentrique, ici considéré galiléen. Les phases de décollage et d'atterrissage sont considérées suffisamment rapides pour être négligées.

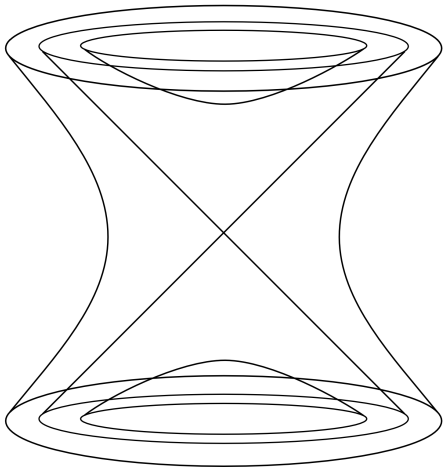
Concernant la gravitation, le temps ralentit quand la gravitation augmente :

$$\Delta t' = \left(1 + \frac{g\,h}{c^2}\right)\Delta t,\ h \text{ : altitude},\ g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$$

$\Delta t'$ est le temps passé en altitude et Δt au sol.
(relativité générale en champ faible)

Vous pouvez imaginer trois horloges, la première immobile dans le référentiel géocentrique, la deuxième au repos dans l'avion et la troisième posée au sol.
Vos résultats sont-ils compatibles avec ceux de l'expérience réalisée en 1971 ?

Correction page 342.



2

Diagrammes d'espace-temps

Après le *triangle des temps*, nous présentons ici un deuxième outil géométrique, un diagramme, qui élargit notre vision de l'espace-temps, donne une représentation synthétique des situations et permet de répondre à un ensemble très large de questions.

∞ Lignes d'univers

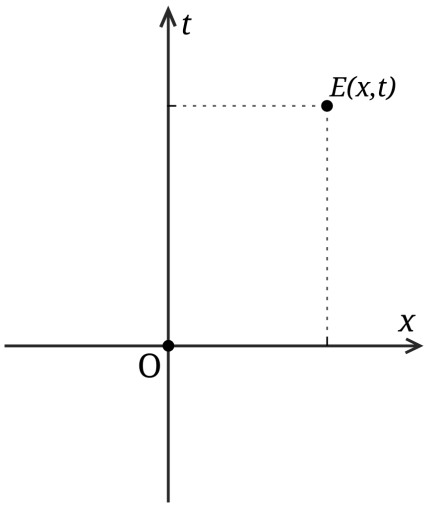
Le triangle des temps suffit pour étudier le mouvement d'un seul objet mobile avec une vitesse constante. Lorsque la vitesse de l'objet varie, ou que nous avons plusieurs objets en mouvement, nous préférons les diagrammes d'espace-temps. Par exemple, pour l'expérience des jumeaux, le sens de la vitesse du jumeau voyageur change entre l'aller et le retour.

La ligne d'univers d'un objet contient toutes ses informations physiques : l'intégralité de ses positions à travers le temps, et donc l'évolution de sa vitesse, accélération et force exercée sur la particule.

Une ligne d'univers représente l'ensemble des événements vécus par un objet.

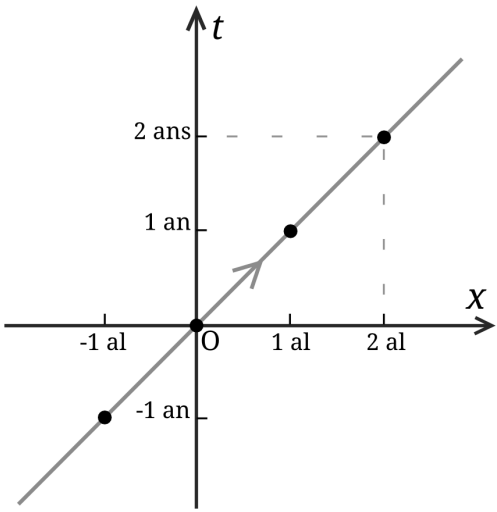
∞ Diagramme de Minkowski

Le diagramme d'espace-temps est souvent appelé diagramme de Minkowski dans le cadre de la relativité restreinte. Dans le cas d'un mouvement rectiligne, un axe spatial suffit et le diagramme sera représenté dans un plan. L'axe horizontal représente l'abscisse *x* de l'objet et l'axe vertical le temps *t*. Chaque point du diagramme correspond à un événement. Le point *O* correspond à l'événement origine — tant temporelle que spatiale.

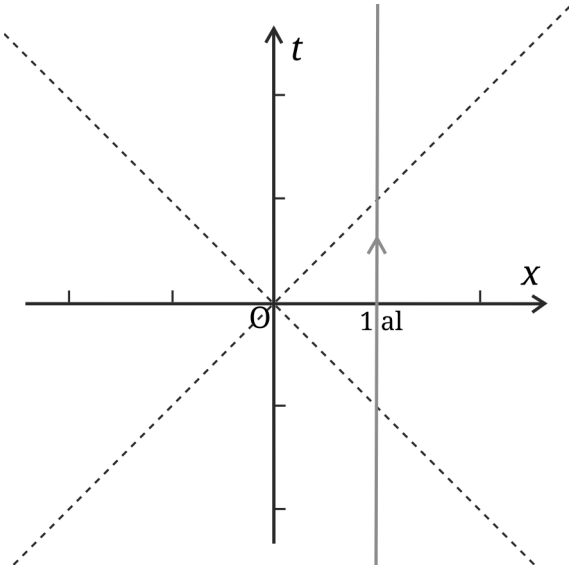


Commençons par considérer le mouvement d'un photon qui "passe" par *O* et qui se dirige vers la droite. Les événements successifs "vécus" par le photon créent sa ligne d'univers. Nous graduons les axes en unités naturelles à l'espace-temps et nous

choisissons l'année comme unité de temps.

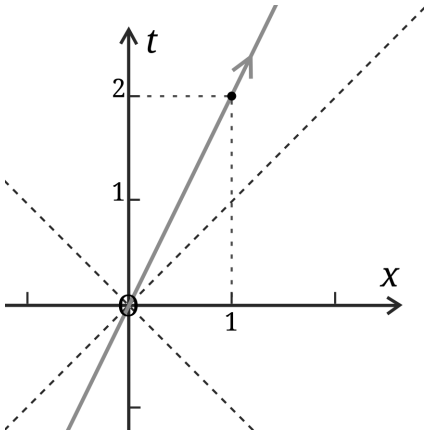


Il y a un an le photon était situé à une année-lumière à gauche, il est maintenant ici, il sera dans un an à une année-lumière à droite, etc.
De plus, nous considérons un deuxième photon, qui passe aussi par l'origine, mais qui se déplace dans l'autre sens, de la droite vers la gauche. Les deux lignes d'univers des photons sont représentées en pointillés et sont souvent présentes pour aider la lecture des diagrammes de Minkowski.
Dans le cas d'une particule immobile dans le référentiel d'étude, la ligne d'univers est une ligne verticale orientée vers le haut.
Sur le diagramme qui suit nous avons la ligne d'univers d'un objet immobile dans le référentiel d'étude et situé à une année-lumière à droite de l'origine du repère.

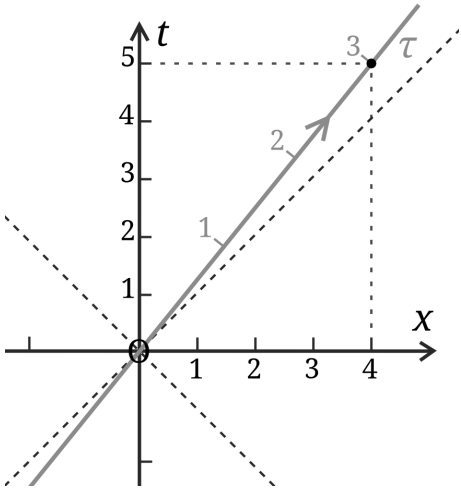


Nous considérons maintenant le cas général d'une particule qui passe par *O* et se déplace vers la droite avec une vitesse *v* constante. Comme une particule ne peut aller plus vite que la lumière la ligne d'univers est représentée par une droite d'inclinaison intermédiaire entre la ligne verticale (axe du temps) et la ligne pointillée du rayon lumineux correspondant.

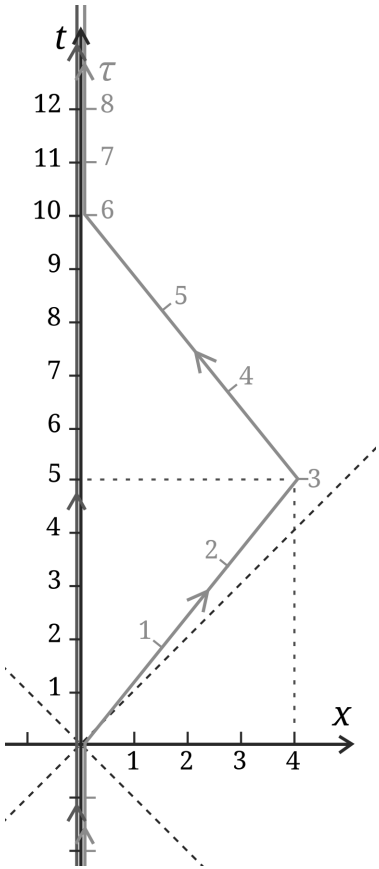
Sur cet exemple, l'objet se déplace à 50% de *c*, il parcourt une année-lumière en deux ans.



Nous savons maintenant qu'il y a dilatation, le temps pour un objet mobile n'est pas le même que pour un objet fixe. Nous reprenons l'exemple de la page 11 d'un voyage à 80% de *c*. Avec le triangle des temps nous obtenons le temps propre τ que nous ajoutons sur la ligne d'univers de l'objet mobile. La dilatation du temps apparaît clairement.



Pour l'expérience des jumeaux nous visualisons les deux lignes d'univers de chacun sur un même diagramme :



Les lignes d'univers sont représentées dans le référentiel du jumeau resté sur Terre, plus précisément le référentiel galactique qui est un excellent référentiel d'inertie. Nous ne pouvons pas directement raisonner depuis le référentiel du voyageur, celui-ci n'est pas d'inertie car sa vitesse varie.

∞ Mise en équations

Équation des lignes d'univers

Ces équations de droites permettent de déterminer dates et positions, de rendez-vous et réception de messages spatiaux.

Vaisseau qui passe par *O* et se dirige vers la droite à la vitesse *v* :

$$v=\frac{x}{t} \quad \text{d'où} \quad t=\frac{1}{\beta}\frac{x}{c} \quad \text{avec} \quad \beta=\frac{v}{c}$$

Vaisseau qui passe par *A* et se dirige vers la gauche à la vitesse *v'* :

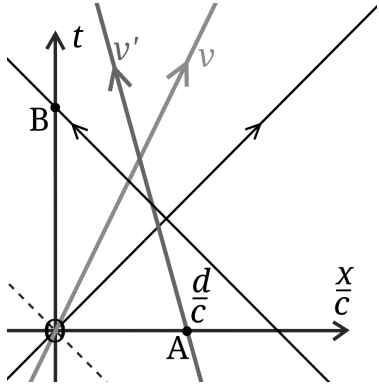
$$t=-\frac{1}{\beta'}\frac{(x-d)}{c} \quad \text{avec} \quad \beta'=\frac{v'}{c}$$

Photon qui passe par *O* et se dirige vers la droite :

$$t=\frac{x}{c}$$

Photon qui passe par *B* et se dirige vers la gauche :

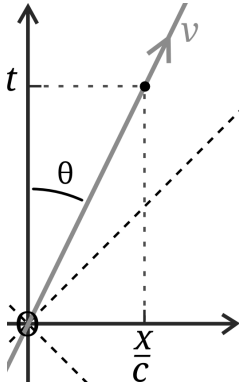
$$t=-\frac{x}{c}+t_B$$



Angles

Plus la vitesse augmente, plus la ligne d'univers du vaisseau, d'abord verticale, s'incline d'un angle θ qui tend vers 45° quand la vitesse se rapproche de la vitesse maximale *c*.

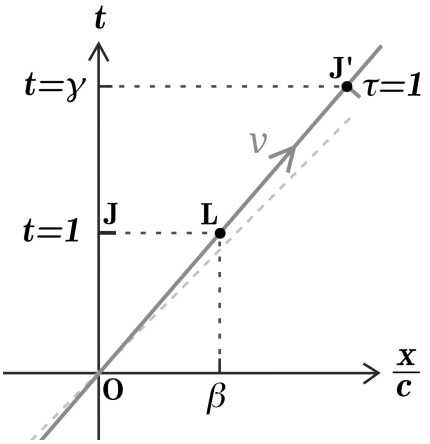
$$\tan\theta = \frac{x/c}{t} = \beta$$



β	0	0,1	0,25	0,5	0,6	0,8	0,9	0,94	1
θ	0°	6°	14°	27°	31°	39°	42°	43,3°	45°
γ	1	1,005	1,03	1,15	1,25	1,67	2,3	3	$+\infty$

Échelles

Sur la ligne d'univers du vaisseau, axe du temps propre, le temps s'écoule plus lentement et les graduations sont plus espacées.



$$OJ = 1$$

$$OL = \sqrt{1+\beta^2}\, OJ$$

$$OJ' = \gamma\, OL$$

$$OJ' = \gamma \sqrt{1+\beta^2}\, OJ$$

$$\frac{OJ'}{OJ} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} = \sqrt{2\gamma^2 - 1}$$

v % de c	50	60	75	80	87	95	99	99,5
γ	1,15	1,25	1,51	5/3	2	3,2	7	10
OJ (t=1)	1	1	1	1	1	1	1	1
OJ' (τ=1)	1,29	1,46	1,89	2,13	2,6	4,4	10	14

Exercices

+ : résolution par les diagrammes de Minkowski.

1.+ ▲△△ Tracez les diagrammes de Minkowski des exercices 1 à 5 du chapitre 1.

Correction p344.

2.+√ ▲△△ **Communications interstellaires**

Dans l'expérience des jumeaux page 17, quand le jumeau voyageur se pose sur la planète Proxima b, il fait une photo et l'envoie vers la Terre sous forme d'onde électromagnétique.
Quand le jumeau sur Terre recevra la photo ?
Tout au long du voyage le jumeau sur Terre suit le périple de son frère à l'aide d'un télescope très puissant. Quand verra-t-il dans son télescope son frère se poser sur la planète ?
Si le jumeau sur Terre regarde dans son télescope à l'instant où son frère se pose sur Proxima b, soit 5 ans après son départ, que voit-il ?
Pour envoyer un message d'anniversaire à son frère au moment où il atterrit sur l'exoplanète, quand doit-il l'envoyer ?
Faire un diagramme de Minkowski qui représente les lignes d'univers des jumeaux et celles des photons qui transmettent la photo, les images du télescope et le message.

Correction p347.

3.√ ▲▲△ Appel au secours

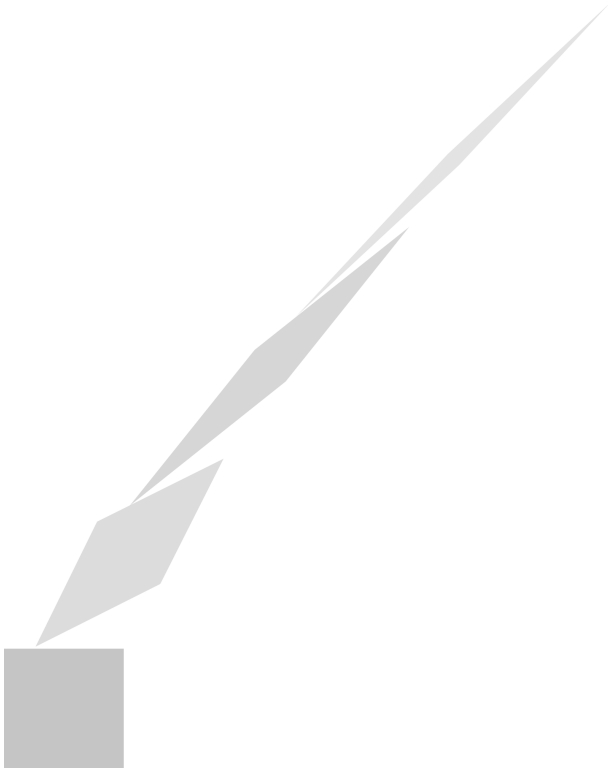
Un vaisseau de croisière avec plus de 10 000 personnes à bord entreprend la traversée Proxima - Terre à la vitesse de 50% de la lumière.
Arrivé à mi-parcours le vaisseau lance un appel aux secours. Une navette de secours d'urgence part de la Terre à 90% de *c* dès le message SOS électro-magnétique reçu.
Combien de temps les passagers devront attendre avant l'arrivée des secours ?

Correction p349.

4. ▲△△ Tim, Tam, Tom

Nous sommes dans un univers lent où la vitesse maximale propre à l'espace-temps est de 20 km/h.
Tom, Tim et Tam sont dans le salon, la pendule indique 10 heure. Ils décident de s'y retrouver à 11 heure. Tom reste sur place. Tim part courir à 10 km/h. Tam part travailler à son bureau situé à 10 minutes-lumière avec un vélo qui roule à 15 km/h.
Tim doit être de retour pour quelle heure indiquée sur sa montre ?
Combien de temps de travail disposera Tam à son bureau ? Quelle heure indiquera sa montre à son retour ?

Correction p350.



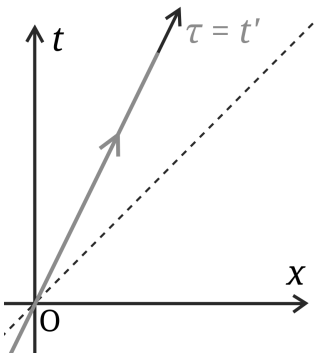
3

CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL

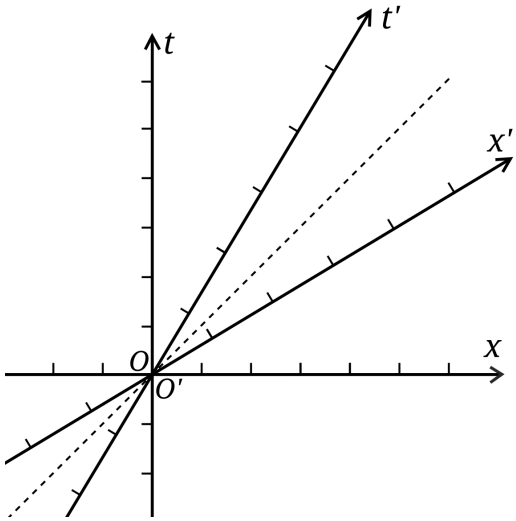
Nous allons considérer un deuxième référentiel d'inertie. Le premier référentiel d'étude était le référentiel *R* d'axes *(x, y, z, t)*, référentiel souvent associé au référentiel galactique dans le cadre des voyages interstellaires.
Le second référentiel *R'* est en mouvement par rapport à *R*, animé d'une vitesse constante. On dit que *R'* est en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à *R*. Pour *R'* l'origine est notée *O'* et les axes *(x', y,' z', t')*.
R' est alors aussi un référentiel d'inertie, où s'appliquent les principes de la relativité restreinte. Ce référentiel *R'* sera souvent associé au vaisseau.

∞ DIAGRAMME D'ESPACE-TEMPS

Nous allons construire pas à pas les axes de *R'* dans le diagramme de Minkowski de *R*. Le temps propre τ à bord du vaisseau spatio-temporel correspond au temps *t'*. L'axe *O't'* s'identifie donc à la ligne d'univers du vaisseau.



La vitesse limite est la même dans *R* et *R'*. Cet invariant montre que l'axe *O'x'* est nécessairement symétrique par rapport à la ligne d'univers d'un flash lumineux qui se déplace vers la droite et passe par *O*. Nous avons ainsi le référentiel *R'* vu depuis le référentiel *R* :

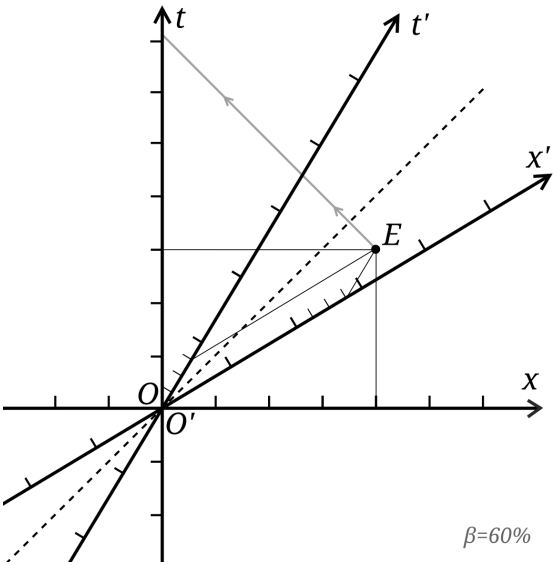


Montrons sur un exemple comment s'effectue la lecture des coordonnées. Depuis la Terre, nous enregistrons, 3 ans après le départ du vaisseau spatial, une énorme éruption stellaire produite par l'étoile Proxima du Centaure située à 4 années-lumière. Le vaisseau se déplace à 60% de *c*. Dans le référentiel du vaisseau où et quand se produit l'éruption ?

Dans le référentiel galactique *R* l'événement *E* a pour coordonnées *(x=4, t=3)*.

Dans le référentiel du vaisseau *R'* nous lisons sur le

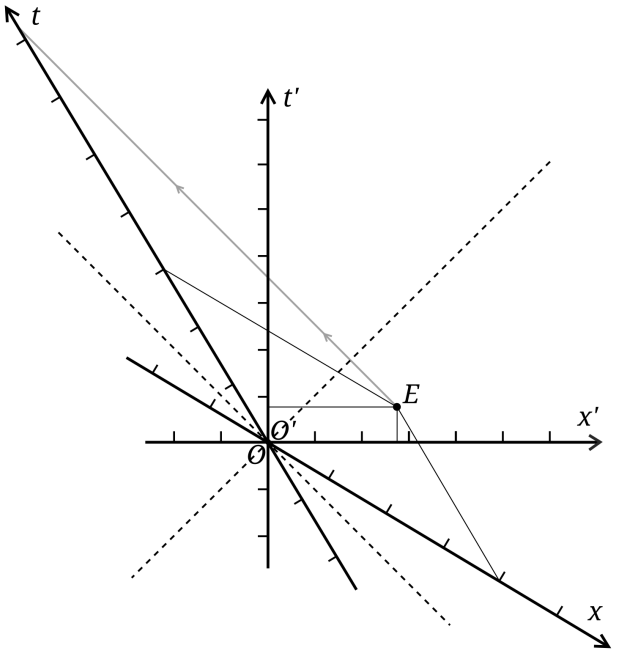
diagramme de Minkowski que l'événement *E* a pour coordonnées *(x'=2,75 , t'=0,75)*. Les occupants du vaisseau détermineront que l'éruption s'est produite 9 mois après leur départ à 2,75 années-lumière de distance.



Néanmoins, les astronautes verront l'éruption dans leur télescope bien après 9 mois. En effet, suite à l'éruption, il faut aussi laisser le temps à la lumière de se propager jusqu'au télescope et à l'œil des observateurs. Pour compléter nous avons tracé en gris clair la ligne d'univers du rayon lumineux émis au moment de l'éruption, celle-ci sera d'abord observée dans le vaisseau après environ 3 ans et demi de voyage, et elle sera ensuite observée sur Terre 7 ans après le départ. Dans les diagrammes de Minkowski, les coordonnées indiquées pour un

événement proviennent d'enregistrements locaux effectués à l'aide du solide de référence et du cristal d'horloges associé. Les temps de propagation ne sont pas inclus.

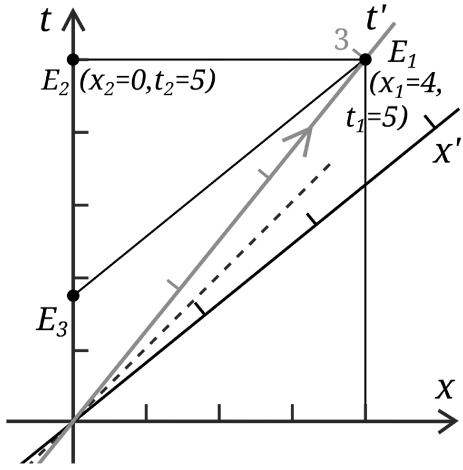
Tous les référentiels d'inertie sont équivalents en relativité restreinte et nous pouvons aussi représenter *R* depuis *R'* :



∞ Relativité de la simultanéité

Dans le cas du vaisseau qui file vers Proxima à 80% de *c* nous avions un triangle des temps 3-4-5. Quand le vaisseau se trouve au niveau de Proxima à 4 années-lumière, avant de réduire sa vitesse, il s'est

écoulé 3 ans dans le vaisseau et 5 ans sur Terre.
Considérons ces deux événements, E_1, le vaisseau est au niveau de Proxima à 80% de c, et, E_2, l'horloge sur Terre indique 5 ans depuis le départ. Un terrien peut se dire : "là, maintenant qu'il s'est écoulé 5 ans pour moi, le vaisseau est à ce moment même au niveau de Proxima. Si je ne le vois pas directement avec un télescope c'est pour des raisons techniques de temps de propagation de l'information à vitesse finie", il peut alors avoir l'émotion du moment partagé avec les spationautes. Si nous regardons ces deux événements dans un diagramme d'espace-temps ils sont effectivement au même temps t, ce sont des événements simultanés dans R.



Pour que ce soit vrai, cette émotion d'un moment commun doit être partagée, or, pour les observateurs au bord du vaisseau il n'en est rien. Pour eux dans R' l'événement simultané sur Terre est E_3, événement bien antérieur, moins de deux ans après le départ.
La simultanéité est relative au référentiel considéré. En mécanique Newtonienne des événements simultanés le restaient dans tous les référentiels, en relativité restreinte la simultanéité n'est pas une

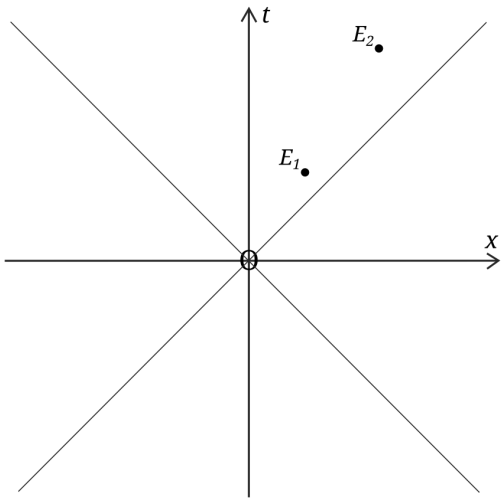
notion absolue. Dans R, E_1 et E_2 sont simultanés, dans R', E_1 est antérieur à E_2.

∞ Le principe de causalité

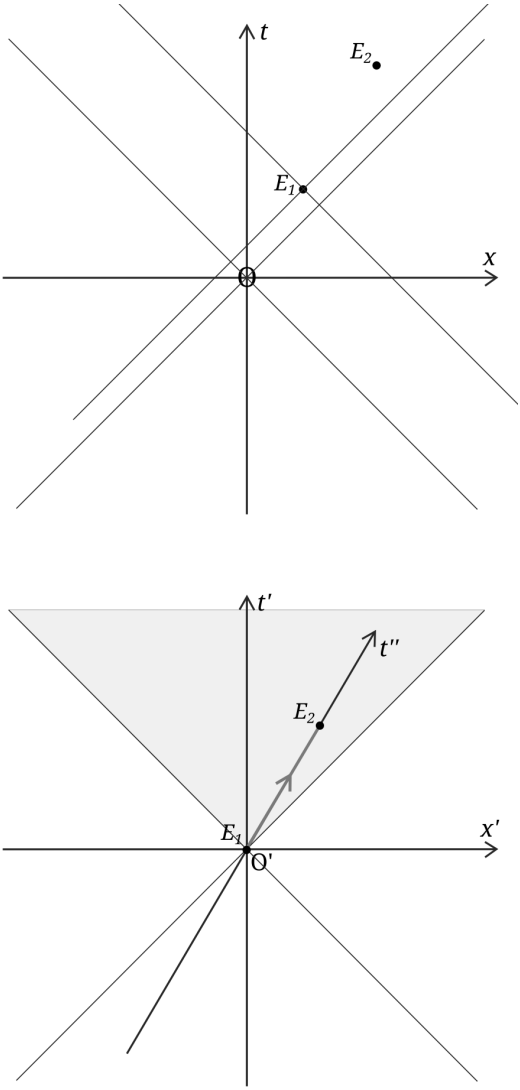
On ne peut qu'aller du passé vers le futur. C'est de la pure logique, la cause produit un effet et non l'inverse ! Le monde est *Un* , et ce n'est qu'un principe évident de cohérence. Si vous pouviez remonter le temps et voyager dans le passé, vous détruiriez le présent... Par exemple, vous partez 50 ans dans le passé et lors de ce voyage temporel vous mourrez suite à un accident de voiture, ou tout simplement vos actions font que vos parents ne se rencontrent finalement pas, etc. Si vous voulez à tout prix voyager dans le passé, il faudrait alors plusieurs présents et supposer des mondes parallèles qui réalisent tous les possibles. En physique, on choisit la théorie la plus simple pour expliquer les faits, il n'y a qu'un seul monde, *Une* réalité, le passé ne peut être modifié, le futur ne pré-existe pas, on ne peut faire marche arrière et la flèche du temps avance constamment du présent vers le futur.
La relativité restreinte respecte bien sûr le principe de causalité. Pas de manière aussi directe que dans la vieille mécanique, mais de manière tout aussi rigoureuse. Le fait qu'il y ait plusieurs temps, la possibilité de voyager dans le futur, une simultanéité relative, jette un trouble que nous allons de suite éclaircir.

Prenons deux événements E_1 et E_2 quelconques. S'il y a un lien de causalité entre eux nous pouvons déterminer quel événement est antérieur, et cet ordonnancement temporel doit être indépendant du référentiel d'observation. Deux cas différents peuvent se produire, représentons les événements sur un diagramme dans un référentiel d'observation arbitraire *R*.

Premier cas : il y a un lien causal possible entre E_1 et E_2. Les deux événements ont un ordre temporel constant quel que soit le référentiel d'observation.

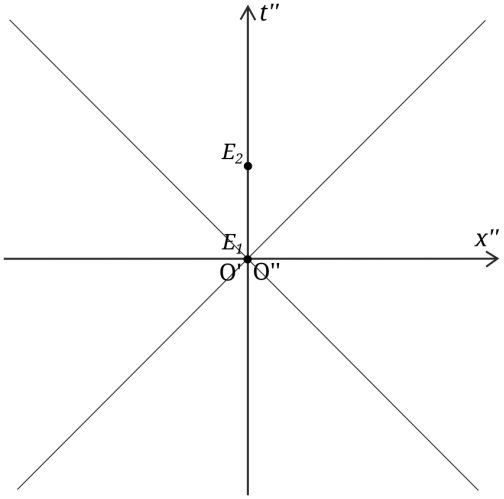


Dans *R*, E_2 est ultérieur à E_1 car $t_2 > t_1$.
Nous considérons ensuite *R'*, référentiel immobile par rapport à *R* mais avec une nouvelle origine $O'=E_1$.



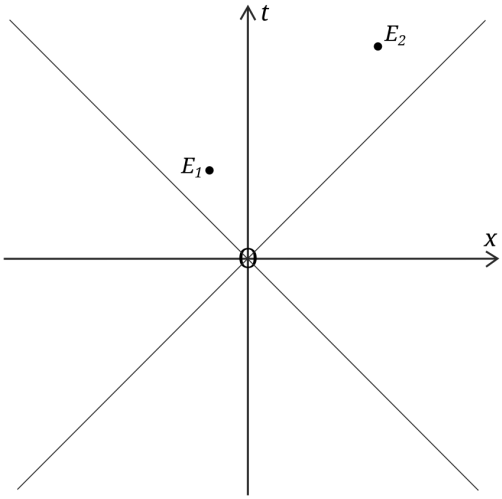
Nous constatons un lien de causalité possible entre les deux événements, par exemple un vaisseau peut relier les deux points (sa vitesse n'aurait pas à dépasser la vitesse maximale), ou une succession d'événements qui se propagent de proche en proche comme les morceaux de sucre qui tombent

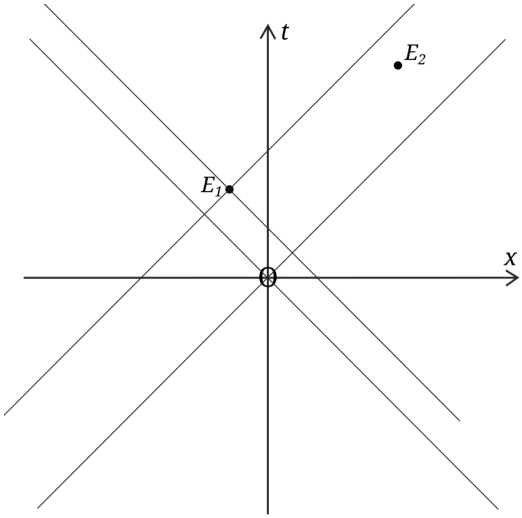
et établissent un enchaînement causal.
Nous pouvons ensuite nous placer dans le référentiel propre R'' du vaisseau, l'ordre chronologique n'est pas changé et nous avons toujours E_2 ultérieur à E_1 et $t_2'' > t_1''$.

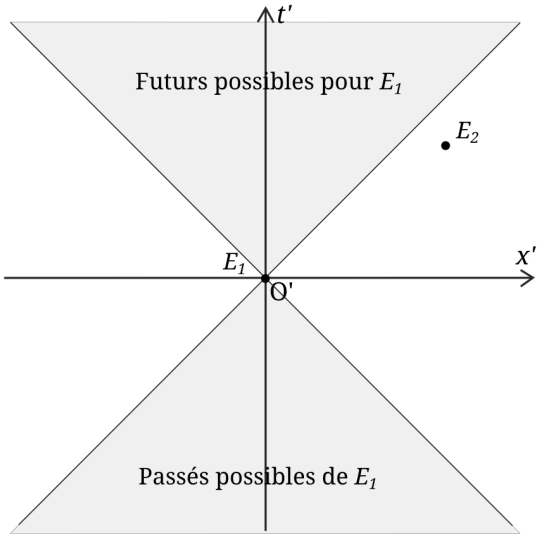


Les événements E_1 et E_2 se produisent au même endroit dans R''. C'est dans ce référentiel propre que l'intervalle de temps entre les événements est minimal : $t_2'' - t_1'' = \Delta t'' = \tau < \Delta t' = \Delta t$.

Deuxième cas : il n'y a pas de lien causal possible entre E_1 et E_2. L'ordre temporel n'est pas défini, E_1 est antérieur à E_2 dans un référentiel, l'inverse dans un autre, et, les événements sont simultanés dans un troisième. Cela ne remet pas en cause le principe de causalité, car il n'y a aucun lien de cause à effet possible entre ces deux événements.


t
E_2
E_1
x


t
E_2
E_1
x



Aucun objet matériel ou objet lumineux passant par E_1 ne peut rejoindre E_2, et vice-versa. Aucun objet ne peut aller plus vite que la lumière. Ces deux événements sont indépendants et ne peuvent interagir. Chercher une chronologie entre eux n'a pas de sens. Il n'existe pas de référentiel propre où ces deux événements sont au repos.

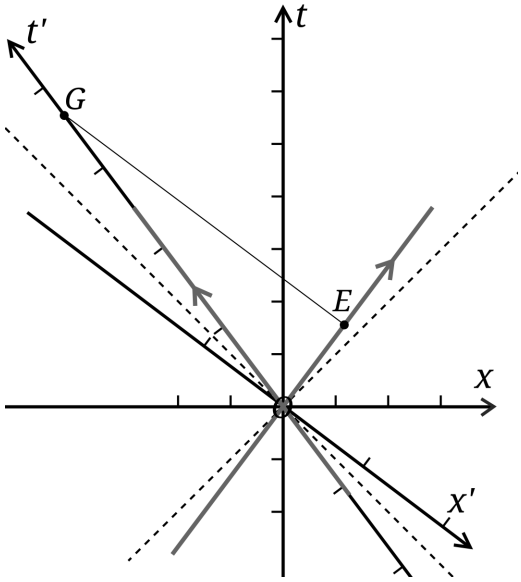
∞ Composition des vitesses

Deux vaisseaux filent l'un vers l'autre à 75% de la vitesse maximale. Si vous vous placez dans un des vaisseaux vous verrez l'autre vaisseau venir vers vous à quelle vitesse ?
Si nous avions l'additivité des vitesses comme en mécanique classique nous trouverions 150% de c,

vitesse supérieure à la limite, ce qui est, dans les faits, impossible.

Nous allons représenter sur un diagramme les lignes d'univers des deux vaisseaux dans le référentiel galactique *R*. Les deux vaisseaux se rapprochent, se croisent en *O*, puis s'éloignent.

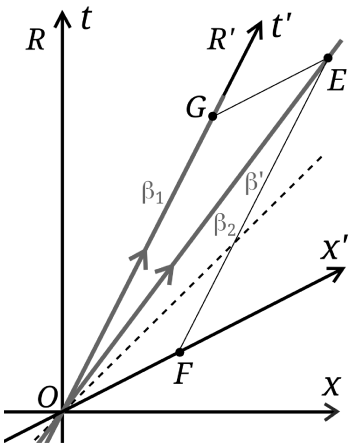
Depuis le référentiel *R'* d'un des deux vaisseaux nous mesurons les coordonnés du second et nous aurons simplement sa vitesse dans *R'*.



La distance *OG* correspond à *t'* et mesure sur le dessin 4,8 cm. La distance *EG* correspond à *x'* et mesure sur le dessin 4,6 cm. En divisant *EG* par *OG* nous obtenons la vitesse relative des vaisseaux :

$$v' = 96\% \text{ de } c$$

Prenons maintenant un second cas où les vaisseaux se déplacent dans le même sens, l'un à 50% et l'autre à 75% de *c* :



Nous divisons *EG* par *EF* et nous trouvons une vitesse relative entre les deux vaisseaux de 40% de *c*.

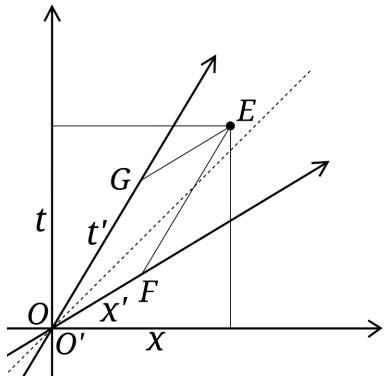
Clairement, pour des vitesses relativistes, les vitesses ne s'ajoutent ou ne se soustraient pas.

La loi de composition des vitesses est différente en relativité restreinte et assure que les vitesses des objets soient bien subluminiques.

∞ Mise en équations

∘ Transformation de Lorentz

Pour un événement *E*, nous cherchons à exprimer ses coordonnées *(x',t')* dans *R'* par rapport à celle *(x,t)* dans *R*.



Prenons le cas de t' : $t' = \frac{OG}{\gamma\sqrt{1+\beta^2}}$

Nous avons appliqué le facteur d'échelle pour passer de R à R', facteur établit dans le chapitre précédent.

Les coordonnées du point G sont données par l'intersection des deux droites suivantes :

$$t = \frac{1}{\beta}\frac{x}{c} \quad \text{et} \quad t - t_E = \beta\left(\frac{x}{c} - \frac{x_E}{c}\right)$$

(axe t' et droite parallèle à l'axe x' qui passe par E avec une pente inverse à celle de l'axe t')

Après résolution de ce système d'équations :

$$t_G = \gamma^2\left(t_E - \beta\frac{x_E}{c}\right) \quad \text{et} \quad \frac{x_G}{c} = \beta t_G$$

Ainsi : $OG = \sqrt{{t_G}^2 + \left(\frac{x_G}{c}\right)^2} = \gamma^2\sqrt{1+\beta^2}\left(t_E - \beta\frac{x_E}{c}\right)$

Et finalement : $t' = \gamma\left(t_E - \beta\frac{x_E}{c}\right)$

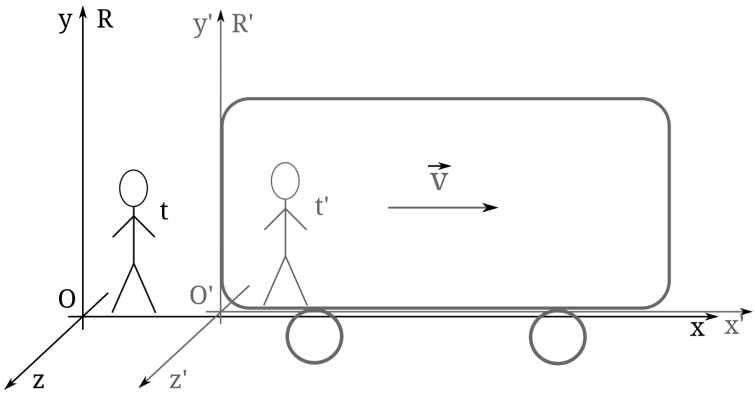
En procédant de manière analogue pour x', nous trouvons : $\frac{x'}{c} = \gamma\left(\frac{x_E}{c} - \beta t_E\right)$

Nous obtenons ce qu'on appelle la transformation de Lorentz des coordonnées d'un événement. Pour un mouvement de R' selon Ox et la mise à zéro des

horloges et des coordonnées spatiales quand celles-ci coïncident en *O*=*O'*, nous pouvons, sans perdre en généralité, écrire :

Transformation de Lorentz

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{c} = \gamma\left(\dfrac{x}{c} - \beta t\right) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \beta \dfrac{x}{c}\right) \end{cases}$$



À *t=0* et *t'=0*, *O* et *O'* coïncident, puis *O'* s'éloignent vers la droite à fur et à mesure que le temps passe. Sur un diagramme de Minkowski, en plein accord avec celui du dessus, *O* et *O'* ne sont plus des points mais des lignes d'univers, l'axe de *t* et celui de *t'*. Les origines *O* et *O'* indiquées sont les positions spatio-temporelles à *t=t'=0*.

Pour obtenir les coordonnées dans *R* à partir de celles de *R'*, il suffit d'inverser le signe de la vitesse et donc de β :

$$\begin{cases} \frac{x}{c} = \gamma\left(\frac{x'}{c} + \beta t'\right) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \beta\frac{x'}{c}\right) \end{cases}$$

Dans la limite des faibles vitesses nous retrouvons bien la transformation classique des coordonnées. Les coordonnées spatiales et de temps sont alors déconnectées pour laisser place à un espace et un temps tous deux absolus :

Transformation de Galilée

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Dans ce livre nous avons fait le choix pédagogique de partir du *triangle des temps* pour construire la relativité restreinte. Nous pourrions aussi partir de la transformée de Lorentz. Dans ce qui suit nous retrouvons la dilatation du temps, la contraction des longueurs et l'existence d'un invariant relativiste en utilisant cette transformation.

• **Dilatation du temps :** nous avons des événements qui se produisent au même emplacement dans *R*, soit $x_2=x_1$ et $\Delta x=x_2-x_1=0$, séparés par un intervalle de temps $\Delta t=t_2-t_1$. Que devient cet intervalle temporel dans R' ? $\Delta t'=(\gamma\Delta t-\beta\Delta x/c)$ d'où $\Delta t'=\gamma\Delta t$. CQFD

• **Contraction des longueurs :** nous pouvons imaginer une règle au repos dans *R* placée sur l'axe des *x*, $L=\Delta x=x_2-x_1$. Le protocole de mesure d'une longueur dans un référentiel donné exige de déterminer les positions des extrémités au même instant dans ce référentiel. Mesure de la longueur relative *L'* dans *R'* : $\Delta x=\gamma(\Delta x'+\beta c\Delta t')$ or $t'_2=t'_1$ d'où $L=\gamma L'$, *soit* $L'=L/\gamma$. CQFD

• **L'invariant de Lorentz :** En mécanique classique nous avions deux quantités invariantes la longueur $L=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ et la durée Δt. Quel que soit le référentiel d'étude, nous avions la distance Euclidienne et la durée inchangées. Ce n'est plus le cas en relativité restreinte. Mais nous avons une autre quantité qui vérifie cette propriété : $\Delta s^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2$. Δs est l'intervalle d'espace-temps entre deux événements quelconques, il correspond à une sorte de distance minkowskienne. Sa propriété d'invariance se vérifie en effectuant le calcul de Δs dans un second référentiel d'inertie *R'* :

$\Delta s'^2=c^2\Delta t'^2-\Delta x'^2-\Delta y'^2-\Delta z'^2$

$\Delta s'^2=\gamma^2(c\Delta t-\beta\Delta x)^2-\gamma^2(\Delta x-\beta c\Delta t)^2-\Delta y^2-\Delta z^2=\Delta s^2$

Nous pouvons écrire Δs^2 en fonction de la vitesse *v* d'un objet qui rejoint les deux événements selon une

trajectoire rectiligne et uniforme :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Δs^2 peut être de différents signes, s'il y a un lien causal possible entre les événements, $v \leqslant c$, Δs^2 est positif ou nul et l'intervalle est dit de genre temps ou de genre lumière, s'il est négatif, $v > c$, Δs^2 est de genre espace. Lorsque Δs^2 n'est pas de genre espace, nous pouvons lier l'intervalle Δs au temps propre τ :

$$\tau = \frac{\Delta s}{c} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Le temps propre est la notion fondamentale sur laquelle se construit la relativité restreinte et générale. Cette mesure du vieillissement d'une particule est invariante et absolu, contrairement aux coordonnées d'espace-temps *(ct, x, y, z)* qui sont relatives et n'ont pas de sens physique en soit.

∘ Composition des vitesses

Nous utilisons les notations de la figure page 61. β_1 et β_2 sont les vitesses en pourcentage de *c* des vaisseaux 1 et 2 dans *R*. β' est la vitesse du vaisseau 2 dans *R'*. La première équation est celle de la ligne d'univers du vaisseau 1 dans

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{\beta_1} \dfrac{x}{c} \\ t - t_E = \beta_1 \left(\dfrac{x}{c} - \dfrac{x_E}{c}\right) \\ t_E = \dfrac{1}{\beta_2} \dfrac{x_E}{c} \end{cases}$$

R, la deuxième l'équation de la droite *(EG)* et la troisième le lien entre les coordonnées d'un point *E* sur la ligne d'univers du vaisseau 2.
La première équation appliquée au point G donne :

$$OG=\sqrt{{t_G}^2+\left(\frac{x_G}{c}\right)^2}=\sqrt{1+\beta_1^2}\,t_G$$

De plus :

$$t_G-t_E=\beta_1(\beta_1 t_G-\beta_2 t_E) \quad \text{et} \quad t_G(1-\beta_1^2)=t_E(1-\beta_1\beta_2)$$

Après un peu de calcul, on a *EG* en fonction de β_1, β_2 et t_G. On calcule la vitesse relative : $\beta'=EG/OG$.

D'où :

$$\beta'=\frac{\beta_2-\beta_1}{1-\beta_1\beta_2} \quad \text{(vaisseaux dans le même sens),}$$

$$\beta'=\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \quad \text{(vaisseaux en sens contraires).}$$

On retrouve bien les bons résultats pour les deux exemples du cours :

$$\beta'=\frac{0{,}75+0{,}75}{1+0{,}75\times 0{,}75}=0{,}96 \quad \text{et} \quad \beta'=\frac{0{,}75-0{,}5}{1-0{,}5\times 0{,}75}=0{,}4$$

En termes de vitesses nous avons : $\boxed{v'=\dfrac{v_1+v_2}{1+\dfrac{v_1 v_2}{c^2}}}$

Si les vitesses sont petites devant *c*, le dénominateur tend vers 1 et $v'=v_1+v_2$, nous retrouvons l'additivité classique des vitesses.

Deuxième méthode : Nous avons raisonné avec des objets qui se déplacent à vitesses constantes. Nous pouvons faire un calcul plus général en utilisant la transformation de Lorentz.

Définition de la vitesse instantanée selon *(x,t)* et *(x',t')* dans *R* et *R'* :

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad v'=\frac{dx'}{dt'}$$

ces grandeurs devraient être notées v_x et $v_{x'}$, nous écrirons *v* et *v'* pour alléger.

D'après la transformée de Lorentz :

$$x'=\gamma(x-\beta ct) \quad \text{et} \quad ct'=\gamma(ct-\beta x) \quad \text{avec} \quad \beta=u/c$$

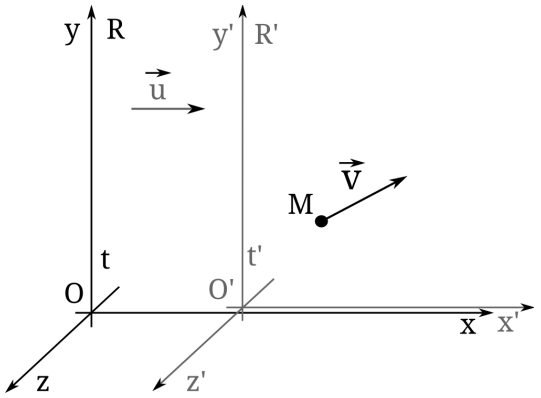
d'où pour des variations infinitésimales :

$$dx'=\gamma(dx-\beta c\,dt) \quad \text{et} \quad c\,dt'=\gamma(c\,dt-\beta\,dx)$$

Et en divisant membre à membre :

$$\frac{dx'}{c\,dt'}=\frac{dx-\beta c\,dt}{c\,dt-\beta\,dx} \quad , \quad \frac{v'}{c}=\frac{\frac{v}{c}-\beta}{1-\beta\frac{v}{c}} \quad \text{et} \quad v'=\frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

u est la vitesse de *R'* par rapport à *R*.



Nous pouvons obtenir facilement les deux autres composantes de la vitesse selon *y* et *z* [6], mais nous nous limitons ici au mouvement rectiligne.

∘ Transformation de l'accélération

Toujours selon *x* et *x'* : $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ et $a_{x'}' = \frac{dv_{x'}'}{dt'}$

Simplement notées *a* et *a'* par la suite.

$$a' = \frac{dv'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{a\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)+\left(v-u\right)\frac{u}{c^2}a}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2}\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)}$$

(dérivée d'un quotient)

$$\text{Soit : } a' = \frac{1}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^3\gamma^3}a$$

Dans le cas où *M* est initialement au repos dans *R'* la vitesse initiale *v* est nulle et $\boxed{a' = \frac{a}{\gamma^3}}$.

6 Fait en exercice page 101 (composition des vitesses et des accélérations en 3D).

Exercices

1. ▲△△ Composition des vitesses

a - Deux vaisseaux se dirigent l'un vers l'autre à 50% de *c*. Quelle est leur vitesse relative ?

b - Deux vaisseaux se dirigent dans le même sens, l'un à 80% de *c* et l'autre à 50% de *c*. Quelle est leur vitesse relative ?

Correction p351.

2. ▲▲△ Deux vaisseaux

Deux vaisseaux *A* et *B* produisent les événements suivants dans le référentiel galactique *R* :

$$E_{A,1}(x_A=0, y_A=0, z_A=0, t_1=0)$$

$$E_{B,1}(x_B=2, y_B=2, z_B=2, t_1=0)$$

$$E_{A,2}(2,0,0,t_2=4) \qquad E_{B,2}(4,4,4,t_2=4)$$

$$E_{A,3}(4,0,0,8) \qquad E_{B,3}(5,5,5,8)$$

Distances et temps en années-lumière et années.
R considéré d'inertie.

a - Quelles sont les vitesses moyennes des vaisseaux entre t=0 et t=4 ?
Même question entre t=4 et t=8.

b - Quelles sont les accélérations moyennes des vaisseaux entre t=0 et t=8 ?

c - Le vaisseau *A* a un mouvement de translation, rectiligne et uniforme. Nous appelons *R'* le référentiel du vaisseau *A*. Le référentiel *R'* est-il d'inertie ?
Déterminez les coordonnées des événements du vaisseau *B* vu depuis le vaisseau *A*.
La trajectoire du vaisseau *B* dans *R* peut-elle être rectiligne ? En est-il de même pour la trajectoire de *B* vu de *R'* ?

d - Dans *R'*, déterminez la vitesse moyenne du vaisseau *B* entre t'_1 et t'_2, puis entre t'_2 et t'_3.

e - Dans *R'*, déterminez l'accélération moyenne du vaisseau *B*.

f - Pourriez-vous déterminer l'accélération moyenne ressentie par les passagers du vaisseau *B* ?

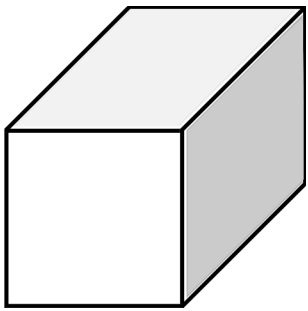
g - Les accélérations sont ici calculées en al/an^2, comment les convertir en m/s^2 ?
En déduire l'accélération propre à laquelle sont soumis les astronautes en pourcentage du champ de pesanteur terrestre au niveau de la mer : g=9,81 m/s^2.

Correction p351.

3.√ ▲▲△ Limite des faibles vitesses

Deux voitures roulent face à face à 90 km/h. Quelle est leur vitesse relative ? Déterminer la différence avec la limite classique.

Correction p356.



4

L'APPARENCE DES CHOSES

Parfois nous oublions naïvement de tenir compte du temps de propagation des signaux jusqu'à notre œil, comme si nous voyions l'espace-temps spontanément dans son ensemble.

Nous allons commencer par étudier l'effet Doppler où, de part le mouvement relatif, la couleur des objets est modifiée. La couleur de la lumière dépend de la période de l'onde lumineuse. Cette grandeur est un temps, et nous pourrions penser qu'il suffit de tenir compte de la dilatation temporelle. La période perçue serait simplement multipliée par γ comme le temps du voyage dans l'expérience des jumeaux. Sauf que les jumeaux se retrouvent au final au même endroit et il n'y a donc pas de retard dû à la propagation d'un signal à vitesse finie. Pour l'effet Doppler la fréquence ne sera pas simplement divisée par γ, et, de plus, celle-ci différera selon que le vaisseau se rapproche ou s'éloigne.

Après avoir étudié l'effet Doppler, nous prendrons des photos d'une règle relativiste, puis, suivra une contemplation du ciel étoilé dans une fusée chaque fois plus rapide.

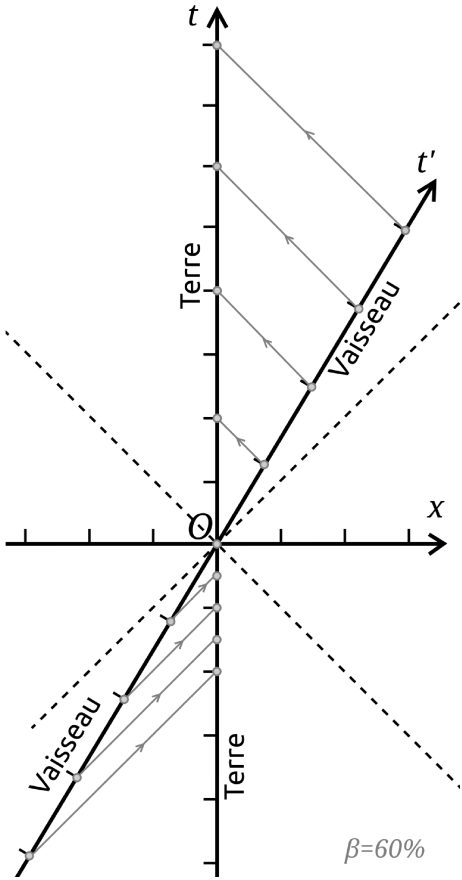
L'effet Doppler

L'effet Doppler s'expérimente avec toutes sortes d'ondes : les ondes sonores, les ondes électromagnétiques, les vagues, etc. Dans tous les cas, nous avons une onde qui se propage à vitesse finie, et un émetteur et un récepteur en mouvement relatif. Par exemple, pour une onde sonore qui se propage dans l'air, si vous vous rapprochez de la source la fréquence est entendue plus aiguë, et si l'émetteur s'éloigne le son est, au contraire, perçu plus grave.

Nous allons ici nous intéresser à une onde électromagnétique qui se propage dans le vide, ou plus précisément dans l'espace-temps.

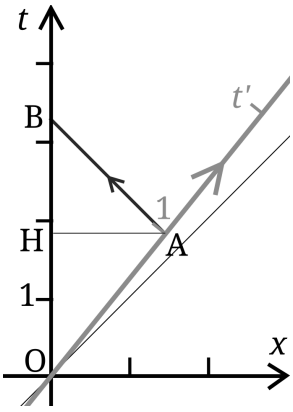
Dans ce cas, en plus des retards ou avances dus à la propagation de l'onde vers un objet mobile, s'ajoute l'effet de perspective spatio-temporel.

Prenons l'exemple d'une lumière jaune, de longueur d'onde 600 nm, émise par un



vaisseau qui se déplace à 60 % de *c*. Pour simplifier imaginons que le vaisseau émette des flashs lumineux réguliers à la fréquence de l'onde. Nous avons tracé les lignes d'univers de ces flashs sur un diagramme de Minkowski. Nous voyons sur Terre les flashs plus resserrés quand le vaisseau se rapproche et plus écartés quand le vaisseau s'éloigne. La durée entre la réception de deux flashs correspond à la période du signal, nous mesurons sur le schéma, quand le vaisseau se rapproche de la Terre :
T=T'/2 soit f=2f' et λ=λ'/2 d'où λ=300 nm,
la lumière reçue est dans l'ultra-violet.
Quand le vaisseau s'éloigne :
T=2T' soit f=f'/2 et λ=2λ' d'où λ=1200 nm,
la lumière reçue est dans l'infrarouge.

∘ Mise en équations



Un signal périodique est émis dans *R'* avec une période *T'*, et, est reçu dans *R* avec une période *T*. Nous nommons *r* le rapport entre ces deux périodes : $r = T/T'$.
Dans le cas où l'émetteur et le récepteur s'éloignent :
$r_+ = OB_R / OA_{R'}$

Pour $OA = 1$ sur l'échelle de *t'* nous avons $OH = \gamma$ sur celle de *t*.
Dans *(x, t)* : $OA = \gamma\sqrt{1+\beta^2}$ (facteur d'échelle).
Le triangle *BHA* est isocèle rectangle en *H* : $AH = BH$.

Théorème de Pythagore dans *OHA* :

$r_+ = OB = OH + HB = \gamma + \sqrt{\gamma^2(1+\beta^2) - \gamma^2}$

Lors de l'éloignement : $r_+ = \gamma(1+\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

Lors du rapprochement : $r_- = \gamma(1-\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

En termes de fréquences, *f=1/T* :

$$f' = \sqrt{\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}} f \quad \text{et} \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}} T'}$$

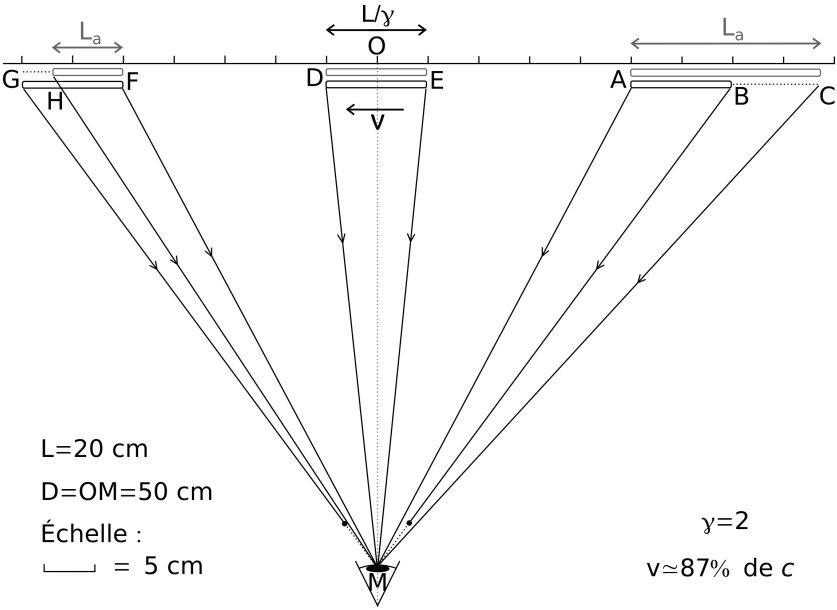
Encadrement : $0 < r < 2\gamma$

Dans l'exemple du cours, $\beta=0,6$, $\gamma=1,25$ et l'application numérique donne bien $f=2f'$ quand émetteur et récepteur se rapprochent, et $f=f'/2$ quand ils s'éloignent.

L'effet Doppler montre que la couleur d'un photon n'est pas une grandeur absolue. Un photon n'est ni rouge, ni bleu, ni jaune, tout dépend d'où on le regarde. Sa longueur d'onde dépend du référentiel d'inertie d'observation et il n'existe pas d'observateur privilégié.
Un photon possède d'autres caractéristiques, comme la chiralité, qui quant à elle est intrinsèque. Un photon est soit gauche, soit droit et, contrairement à sa couleur, cela ne dépend pas du point de vue.

∞ Photo d'une règle mobile

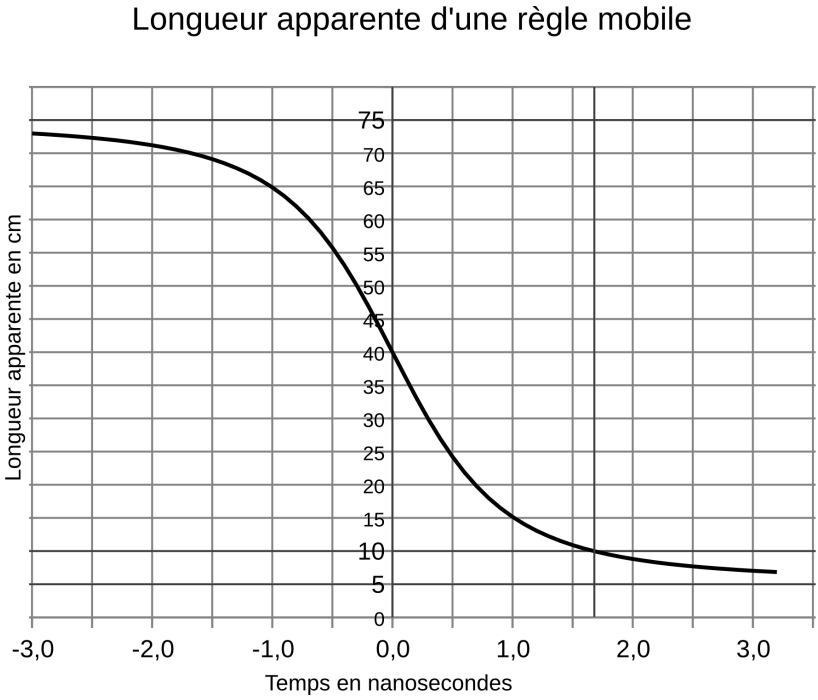
Une règle se déplace à la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel d'étude *R*. Un banc d'optique gradué, fixe dans *R*, permet de repérer la position des deux extrémités de la règle. La longueur propre de la règle, dans le référentiel *R'* où elle est au repos, est notée L. La longueur dans le laboratoire est la longueur contractée L/γ. Nous prenons différents clichés de la règle lors de son passage. Sur chaque photographie, nous notons la longueur apparente L_a, différence des abscisses des deux extrémités repérées sur le banc.



La longueur contractée correspond à des mesures au même instant *t* de la position des extrémités alors

que l'image de la règle qui apparaît sur la plaque photographique est formée par des photons qui parviennent au même instant sur le capteur et qui, de par des temps de parcours différents, n'ont pas été émis au même moment au niveau de l'objet.
On ne sait pas à ce jour fabriquer un appareil photo avec une telle sensibilité et un temps d'obturation si court, mais ce n'est pas hors de portée au vu des progrès actuels de l'optoélectronique. Deuxième défi, animer un objet macroscopique à une vitesse luminique. L'exercice de pensée est quoi qu'il en soit excellent, car il nous permet d'approfondir notre compréhension de la théorie.
Raisonnons dans le référentiel du laboratoire *R*. La règle de longueur L/γ vient de la droite. Les rayons lumineux émis au même instant par les extrémités A et B ne parviendront pas sur l'œil au même moment et ne seront donc pas sur la même image. Le rayon émis par B arrivera en retard.
Il existe un moment antérieur où le rayon émis par cette extrémité compense ce retard, c'est le cas du point C sur le schéma. La longueur apparente est alors supérieure à la longueur contractée.
Quand à $t=0$, la règle est centrée sur O, les rayons sont émis symétriquement et la longueur apparente vaut la longueur contractée. Ceci se produit pour une photo prise à $t \simeq 1,7$ ns (temps de parcours de la lumière de D, ou E, à M).
Pour t positif, quand la règle s'éloigne, la longueur apparente est au contraire plus petite que la longueur contractée.

Nous avons ci-dessous la courbe de la longueur apparente en fonction du temps *t* :



Nous pouvons retrouver facilement les valeurs extrêmes. Quand la règle est encore très éloignée, le retard du rayon lumineux issu de C est d'environ AC/*c*. De plus la règle se déplace à la vitesse *v*, donc, pour rattraper, BC vaut *v* fois le retard.

Ainsi : $L_a = AB + BC = \frac{L}{\gamma} + v\frac{L_a}{c}$

Soit : $L_a = \frac{L}{\gamma(1-\beta)} = L\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \simeq 75\,cm$

Au contraire quand la règle s'éloigne, dans la limite

t→+∞, $\frac{HF}{c}=\frac{L_a}{c}=\frac{L/\gamma-L_a}{\beta c}$, d'où : $L_a=L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\simeq 5\,cm.$

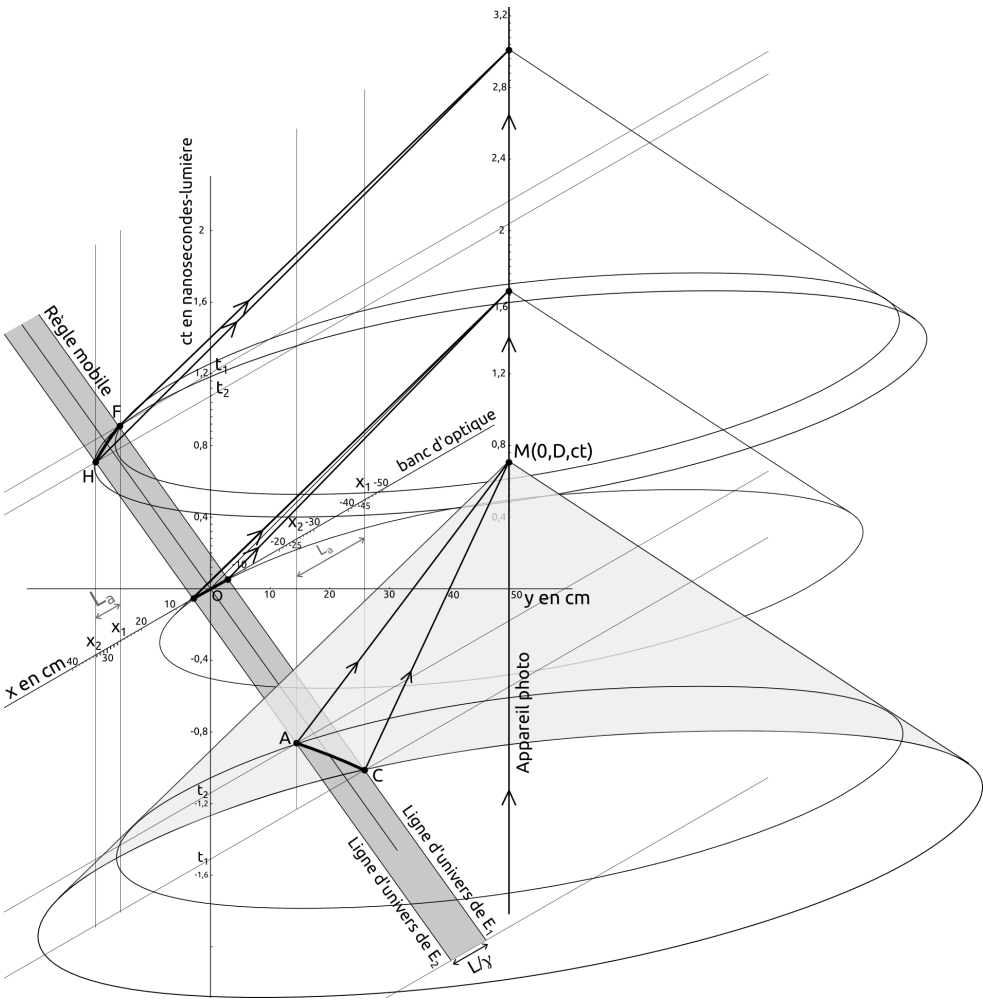
Nous retrouvons finalement le même type de formule que pour l'effet Doppler avec les effets inversés :

$$L_{a,\,t\to\pm\infty}=L\sqrt{\frac{1\mp\beta}{1\pm\beta}}$$

Quand un objet se rapproche, la période perçue est plus courte et sa longueur vue, dans le sens du déplacement, est plus grande, au contraire, quand il s'éloigne la période perçue est plus grande et sa longueur vue plus petite.
Nous avions aussi une inversion de comportement entre le temps et l'espace avec la dilatation du temps et la contraction des longueurs.

Nous venons de faire les calculs à grande distance. Pour retrouver la courbe complète de la longueur sur la photo en fonction du temps, nous nous plaçons dans un diagramme de Minkowski à trois dimensions *(x, y, ct)*.
L'appareil photo est représenté par une ligne d'univers verticale *(0, D, ct)*. Le banc d'optique par le plan d'univers *y=0*. La règle mobile par une bande d'univers inclinée. La résolution du problème est dans le principe simple : trouver l'intersection entre le cône de lumière passé de l'œil à l'instant *t* avec la bande d'univers de la règle mobile.
L'intersection donne la position des deux extrémités dans *R* : $E_1(x_1, 0, ct_1)$ et $E_2(x_2, 0, ct_2)$. Nous avons alors

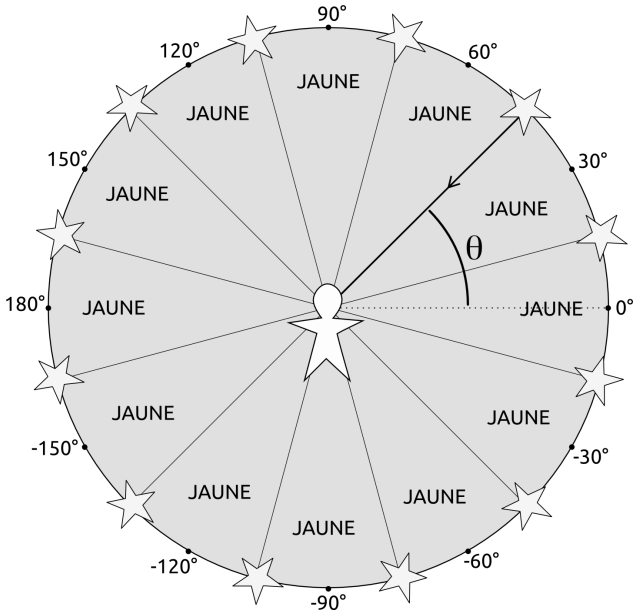
la longueur apparente $L_a = x_2 - x_1$. Mis à part en O, nous avons bien $t_1 \neq t_2$.



Le calcul détaillé est laissé en exercice. L'expression explicite $L_a(t)$ est alors donnée. Le calcul, bien qu'il n'utilise que des notions de géométrie dans l'espace vues au lycée, est un peu long.

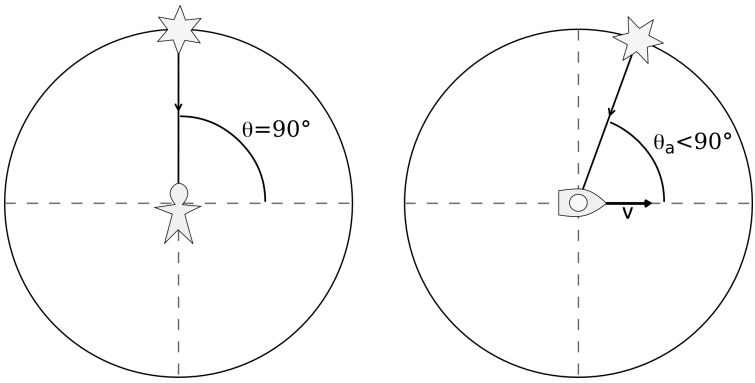
Le ciel étoilé vu du vaisseau

Déterminons la modification de la perception du ciel étoilé en fonction de la vitesse du vaisseau. En plus du changement de la couleur perçus des étoiles par effet Doppler, leur position dans le ciel est modifiée, c'est ce qu'on appelle l'aberration de la lumière. Lorsque nous nous plaçons au repos dans le référentiel galactique, les étoiles sont, dans leur ensemble, immobiles. Pour simplifier, nous considérerons les étoiles jaunes et distribuées de manière homogène.



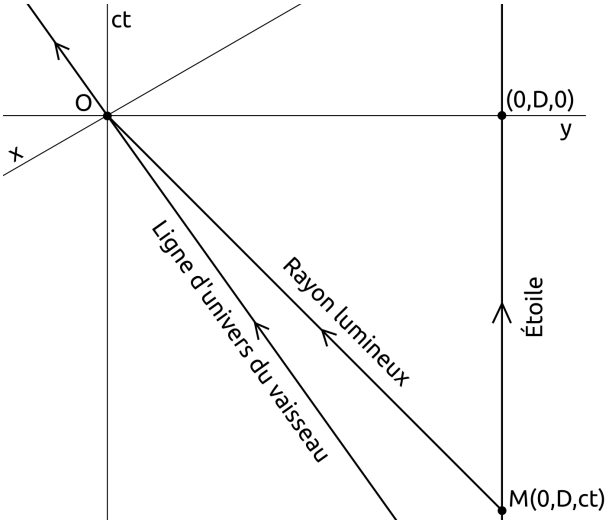
Prenons le cas d'une étoile vue au repos dans le référentiel galactique perpendiculaire à la direction de déplacement du vaisseau. Sous quel angle θ_a

cette même étoile est vue depuis le référentiel du vaisseau ?
Nous pouvons faire une analogie avec la pluie qui tombe, vue à travers le pare-brise d'une voiture on a l'impression que la pluie vient de l'avant, même si depuis la route elle tombe bien verticalement. La démonstration en mécanique classique est assez simple, il suffit d'appliquer l'addition des vitesses. Vous vous doutez bien qu'ici le résultat sera, au moins quantitativement, différent.



Nous devons à nouveau raisonner dans un diagramme de Minkowski à trois dimensions *(x, y, ct)*. À partir du moment où l'on mesure un angle c'est qu'il y a au moins deux dimensions d'espace. Pas besoin néanmoins d'utiliser la troisième dimension d'espace, car il y a invariance par rotation selon la direction du vaisseau, dans le cas contraire, il aurait fallu utiliser, en plus de la colatitude θ, la longitude φ et nous aurions eu à travailler dans un diagramme de Minkowski à quatre dimensions *(x, y, z, ct)*.
Nous nous plaçons dans le référentiel galactique et

nous commençons par étudier le cas $\theta=90°$. Le vaisseau se déplace selon les *x* croissants et l'étoile est située sur l'axe des *y* à une distance D. Nous avons trois lignes d'univers, celle du vaisseau dans le plan *(x, ct)*, celle de l'étoile, verticale, et celle du rayon lumineux dans le plan *(y, ct)*.



Nous définissons une droite par l'intersection de deux plans définis en coordonnées cartésiennes.

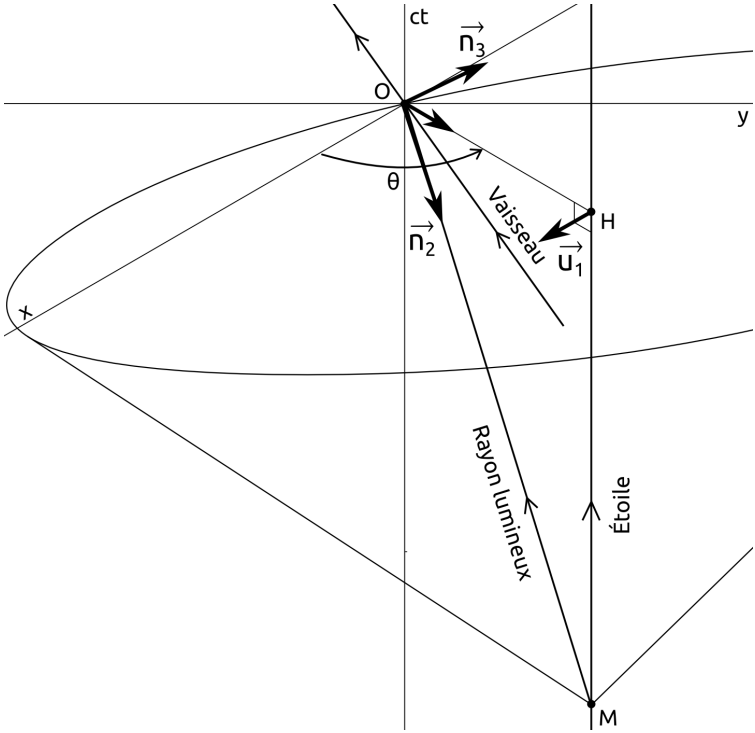
Ligne d'univers du rayon lumineux : $\begin{cases} x=0 \\ y+ct=0 \end{cases}$

Nous utilisons ensuite la transformation de Lorentz pour obtenir cette équation dans le référentiel *R'* du vaisseau :

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-\beta ct) \\ y'=y \\ ct'=\gamma(ct-\beta x) \end{cases} \quad \text{d'où :} \quad \begin{cases} x'=\gamma\beta y' \\ \gamma y'+ct'=0 \end{cases}$$

Or : $\tan(\theta_a)=\dfrac{y'}{x'}$, ainsi : $\tan\theta_a=\dfrac{1}{\gamma\beta}$

Dans le cas d'un vaisseau qui se déplace à 87% de *c*, nous trouvons pour θ=90°, θ_a=30°. Nous remarquons que le résultat ne dépend pas de la distance D. L'effet est accentué par rapport à la formule Newtonienne où $\tan(\theta_a)=1/\beta$ et $\theta_a \simeq 49°$.
Regardons maintenant pour un angle θ quelconque compris entre 0° et 180°.



Un vecteur unitaire selon $\overrightarrow{OH}$ a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Le vecteur $\vec{u}_1$ orthogonal au plan OHM à pour coordonnées $\vec{u}_1(\sin\theta, -\cos\theta, 0)$.
Comme vecteur colinéaire au rayon lumineux nous pouvons choisir $\vec{n}_2(\cos\theta, \sin\theta, -1)$. Nous vérifions que $\vec{n}_3(\cos\theta, \sin\theta, 1)$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{n}_2$.

D'où la ligne d'univers du rayon lumineux :

$$\begin{cases} \sin\theta\, x - \cos\theta\, y = 0 \\ \cos\theta\, x + \sin\theta\, y + c\,t = 0 \end{cases}$$

À l'aide de la même transformation de Lorentz que celle utilisée dans le cas précédent, nous obtenons, après un calcul un peu long mais simple :

$$y' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\beta+\cos\theta)}\, x' .$$

D'où l'expression de $\tan(\theta_a)$, ou, plus simple à utiliser, après quelques manipulations mathématiques détaillées en exercice, l'expression de $\tan(\theta_a/2)$:

$$\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Pour la couleur de l'étoile, nous donnons l'expression de la longueur d'onde perçue dans le vaisseau qui tient compte de l'effet Doppler transversal :

$$\lambda_a = \frac{1-\beta\cos\theta_a}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\lambda$$

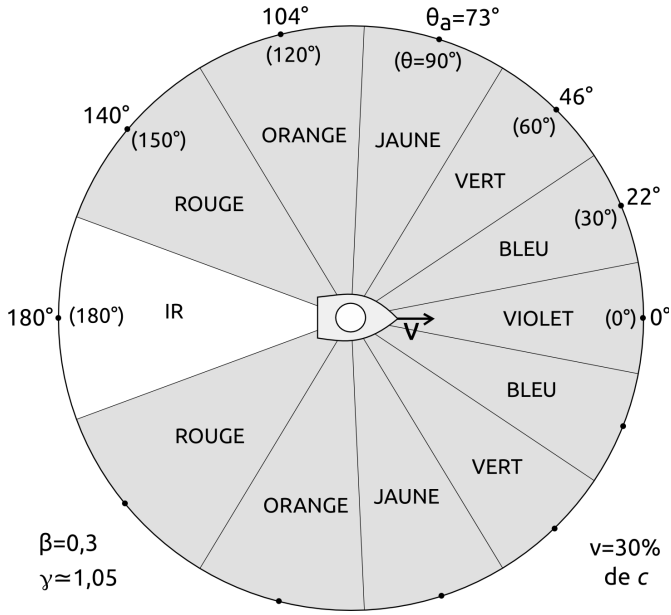
Par exemple, pour β=0,3 et λ=600 nm, nous avons les résultats dans le tableau suivant que nous avons ensuite rapporté sur un diagramme circulaire.

Angles en degrés et longueurs d'ondes en nm :

θ	180	165	150	135	120	105	90	75	60	45	30	15	0
θ_a	180	160	140	121	104	87	73	59	46	34	22	11	0
λ_a	818	806	773	726	673	621	572	531	498	472	454	444	440

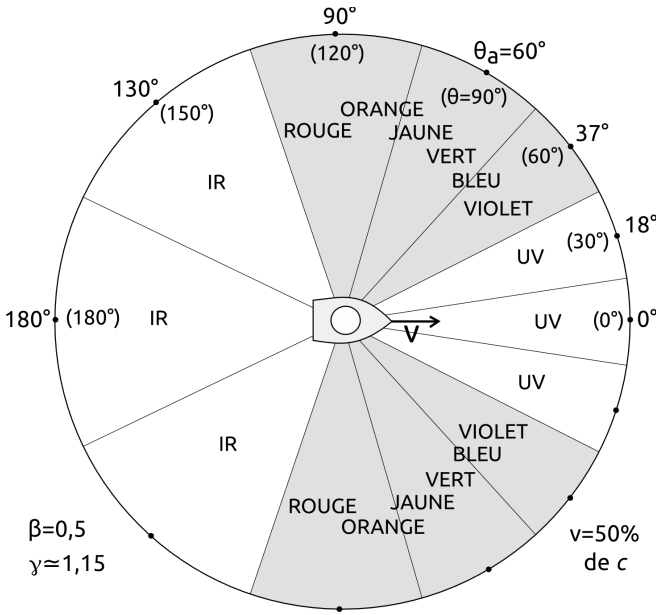
Au fur et à mesure que le vaisseau prend de la

vitesse, les étoiles à l'avant bleuissent, celles à l'arrière rougissent. Latéralement nous avons toutes les nuances spectrales avec une zone où les étoiles restent jaunes. L'hémisphère vers l'avant, sous laquelle nous voyions les étoiles au repos, se resserre. Certaines étoiles présentent dans l'hémisphère arrière apparaissent à l'avant dans le vaisseau, par exemple pour θ=105°>90°, nous avons θ_a=87°<90°.



Pour des vitesses encore plus importantes, les étoiles s'estompent à l'avant en passant dans l'UV, et, à l'arrière en passant dans l'infrarouge. À 87% de *c*, il ne reste plus qu'un anneau visible vers l'avant placé autour de 50°. Néanmoins de nouveaux objets apparaîtront, des objets célestes dans l'infrarouge dans le référentiel galactique seront visibles à la

proue du vaisseau et des objets dans l'UV deviendront visibles à la poupe.



Depuis le référentiel galactique, l'intensité lumineuse reçue des différentes parties du ciel est homogène. Par contre, dans le référentiel du vaisseau, l'énergie globale reçue est plus importante et la luminosité domine vers l'avant.

L'énergie reçue du ciel étoilé dépend de la vitesse du vaisseau selon deux facteurs, l'aberration lumineuse et l'effet Doppler. Une étoile voit sa position et son intensité changer. L'intensité d'une l'étoile varie selon la formule suivante :

$$I_a = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta_a)^2} I$$

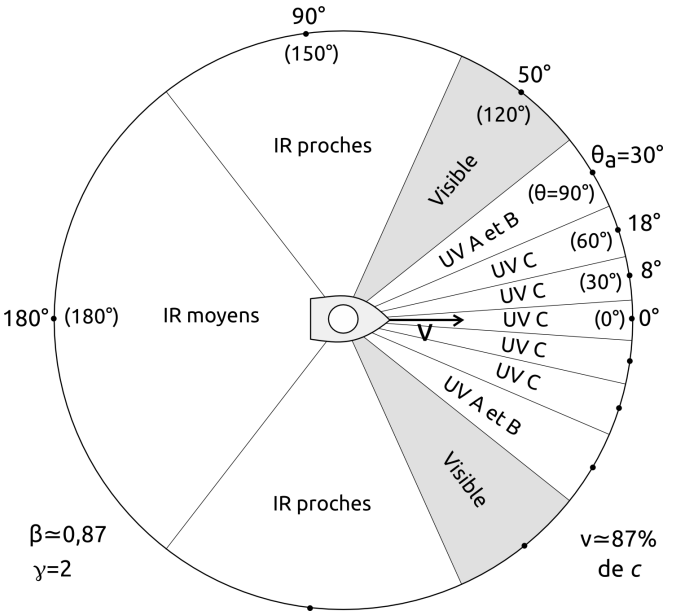
L'intensité correspond à l'énergie reçue par m^2 et par seconde. L'énergie provient des photons, d'énergie individuelle $e=h\nu_a=hc/\lambda_a$. Du fait de l'effet Doppler, les photons voient, d'une part, individuellement, leur fréquence, et donc leur énergie modifiée, et d'autre part, pris dans leur ensemble, ils arrivent avec un rythme différent. Les deux effets sont selon le même facteur Doppler $\sqrt{1-\beta^2}/(1-\beta\cos\theta_a)$, d'où le carré dans l'expression de I_a. Les photons mitraillent plus fréquemment et violemment à l'avant, et plus lentement et doucement à l'arrière.

Regardons maintenant un groupe d'étoiles, elles occupent une certaine surface, encore appelé angle solide, sur la voûte céleste. Quand le vaisseau prend de la vitesse un groupe d'étoile vers l'avant se resserre et, un autre, vers l'arrière, s'étire. Pour calculer l'énergie totale reçue il faut en plus tenir compte de cette densité d'étoiles qui varie.
Pour trouver l'énergie totale reçue nous intégrons l'intensité lumineuse sur une surface sphérique S de rayon R, centrée sur le vaisseau. Nous avons les résultats suivants, établis en exercice :

$$E_a=\int_{\theta_a=0}^{\pi} I_a\, d\Omega_a=\gamma^2(1+\beta^2/3)E$$

$$\text{avec}\quad E=\int_{\theta=0}^{\pi} I\, d\Omega=4\pi I=E(\beta=0)$$

Ω est l'angle solide, il correspond par définition à la surface découpée sur une sphère unité, $\Omega=S_{\mathbb{1}}$, R=1.



Pour illustrer, à 30% de *c*, l'angle solide frontal, d'angle au sommet 30° dans *R*, se réduit à 22° dans *R'*, ainsi la densité apparente des étoiles dans cette partie frontale du ciel devient 80% plus importante[7]. De plus, les photons reçus ont une énergie plus élevée, de jaunes ils deviennent bleus, et de surcroît ils sont reçus en plus grand nombre.
À 50% de *c*, les étoiles se raréfient encore plus à l'arrière, et 91% de l'énergie lumineuse provient alors de l'hémisphère avant.
À 95% de *c* le ciel est 13 fois plus lumineux.

Que dire maintenant du nombre de photons qui arrivent sur le vaisseau ? Nous avons N photons qui parviennent sur le vaisseau pendant un intervalle de temps propre. Depuis le référentiel galactique,

7 rapport des surfaces vues sous les angles solides $\Omega = 2\pi(1-\cos\theta)$.

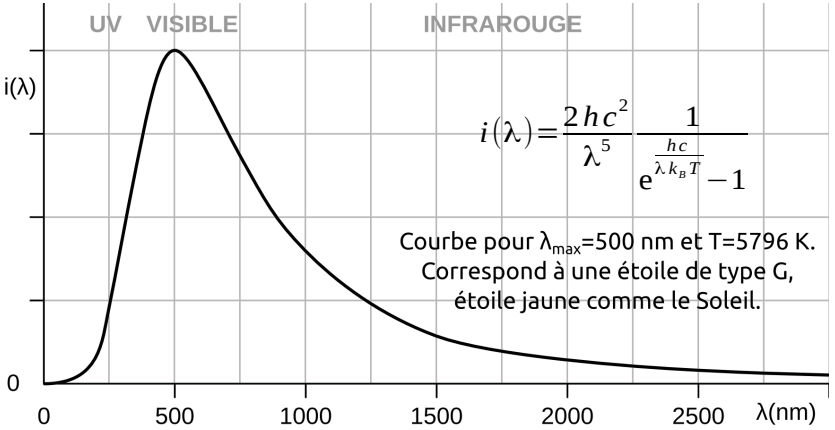
nous observons ces mêmes photons parvenir sur le vaisseau pendant un intervalle relatif dilaté. Ainsi plus le vaisseau prend de la vitesse plus le nombre de photons reçus par seconde par les spationautes augmente avec le facteur γ.

À 50% de *c*, le vaisseau reçoit 15% de photons en plus, et 84% des photons proviennent de l'hémisphère avant.

À 95% de *c*, le vaisseau reçoit 3 fois plus de photons, l'hémisphère céleste avant est 26 fois plus lumineuse, et l'hémisphère arrière 350 fois moins. Concentrons-nous maintenant sur un disque d'un demi-degré, soit la taille apparente de la Lune et du Soleil vus depuis la Terre. Ce disque situé au zénith du vaisseau aura une luminosité 1500 fois supérieure à celle du ciel au repos. Pour comparaison avec ce que l'on observe depuis le sol terrestre, cette luminosité est 40 000 fois inférieur à celle du Soleil, et 12 fois supérieure à celle de la pleine Lune[8]. Mais attention, ce disque central émet dans les ultraviolets, la couronne visible est quant à elle située entre 34 et 52°.

Bien sûr les étoiles ne sont pas toutes de la même couleur, le Soleil est jaune, mais Rigel est bleue et Bételgeuse rouge. De plus, une étoile n'émet pas qu'une longueur d'onde mais un spectre continu donné par ce qu'on appelle le spectre du corps noir :

8 Données : ciel étoilé 0,002 lux / Lune 0,25 / Soleil 120 000 lux.



Ainsi des étoiles du type du Soleil, comme Alpha Centauri A ou B, pourront être vues à l'œil nu à l'avant du vaisseau même à 50% de *c*, car elles émettent aussi dans l'IR qui se décale dans le visible par effet Doppler, et, bien que l'intensité émise soit plus faible dans l'IR, cela est compensé par une augmentation de l'intensité perçue vers l'avant. Donc, pas de problème de navigation en se repérant dans le ciel étoilé pour rejoindre Proxima du Centaure. Par contre, vers l'arrière du vaisseau, les étoiles vont s'estomper beaucoup plus vite.

Pour ce qui est de l'énergie et du nombre de photons totaux reçus les résultats ne changent pas car ceux-ci ne dépendent pas de la longueur d'onde. Le facteur Doppler ne dépend pas de λ et l'aberration déplace du même angle l'ensemble des composantes chromatiques du spectre d'une étoile. Il n'y a pas dispersion, comme dans le phénomène de réfraction des rayons lumineux (à travers un prisme les composantes fréquentielles sont déviées différemment et créent une irisation sous forme d'arc-en-ciel).

Exercices

$\begin{smallmatrix}01\\10\end{smallmatrix}$: résolution par simulation numérique.

1. ▲△△ Le physicien suicidaire

Un conducteur arrive à un carrefour et le feu tricolore est au rouge. Celui-ci pris d'un excès de folie suite à la lecture d'un livre de physique, décide, au lieu de s'arrêter, d'augmenter au contraire sa vitesse pour que par effet Doppler la lumière du feu lui apparaisse verte.
Quelle vitesse doit atteindre son véhicule ?
λ_{rouge}=700 nm, λ_{vert}=500 nm

Correction p357.

2. ▲▲△ Voile laser

Une batterie de lasers Térajoules basée sur le sol terrestre bombarde de photons pendant 10 minutes une voile placée en orbite. La voile atteint une vitesse de 20% de *c*.

a - Que vaut la pression de radiation exercée sur la voile en fonction de la puissance lumineuse Φ reçue ?

b - Pour une puissance lumineuse incidente au niveau de la voile dans le référentiel terrestre constante la force ressentie au niveau de la voile restera-t-elle aussi constante ?
Par quel facteur est-elle modifiée ?

c - Par quel facteur la pression de radiation est-elle modifiée à la fin de la phase d'accélération ?

Corr. p357.

3. ▲▲△ Mélasse optique

Pour ralentir des atomes et donc les refroidir nous plaçons deux lasers identiques face à face. Si un atome placé entre ces deux faisceaux est immobile, il le reste, car les pressions de radiation s'équilibrent.

a - Montrez que, pour un atome en mouvement selon l'axe des lasers, une force apparaît qui l'amène à s'immobiliser.

Cette force s'apparente à un frottement visqueux d'où l'appellation de mélasse optique pour ce phénomène. Les horloges atomiques utilisent une mélasse optique pour refroidir les atomes.

b - Montrez que, pour des vitesses faibles devant *c*, cette force est analogue à la force de frottement des fluides visqueux en régime laminaire : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

La pression de radiation s'explique à l'échelle microscopique par l'absorption puis émission d'un photon par l'atome. La quantité de mouvement de l'atome est modifiée, dans la direction du laser lors de l'absorption et de manière statistiquement isotrope lors de l'émission spontanée. L'atome est ainsi ralenti et confiné. La fréquence de résonance de l'atome et légèrement supérieure à celle des lasers.

c - Nous avons comme pour les frottements visqueux un phénomène dissipatif d'énergie. Expliquer qualitativement comment le processus d'absorption / émission d'un photon par l'atome permet de lui faire perdre de l'énergie cinétique et donc de le refroidir.

d - Dans le cadre du gaz parfait l'énergie cinétique moyenne d'un atome est donnée par la relation $e=\frac{3}{2}k_B T$, où T est la température en Kelvin.

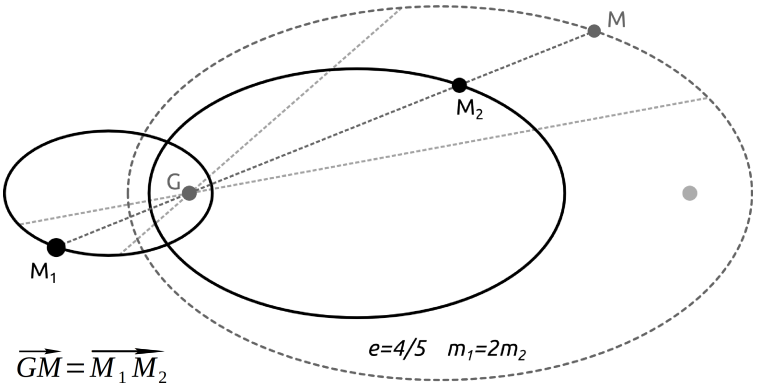
Une fois ralenti l'atome aura une énergie cinétique minimale de l'ordre de la différence d'énergie entre le photon absorbé et celui émis lors de la désexcitation. La largeur de raie du laser est très faible devant celle de l'atome qui prédomine. Dans le cas limite, au repos, l'atome voit sa raie juste en dessous de celle du laser. La distance entre les deux raies correspond alors à la largeur de la raie atomique. La durée de vie τ du niveau excité de l'atome est relié à la différence d'énergie par la relation d'incertitude d'Heisenberg. En déduire une approximation de la température de l'atome obtenue par refroidissement Doppler.
Application numérique : τ=27ns pour un atome de rubidium 87.

e - Donner la vitesse d'un atome ainsi refroidi.

Corr. p358.

4. ▲△△ Détection d'exoplanètes par effet Doppler

Un grand nombre d'exoplanètes est à ce jour détecté et leur nombre connu ne cesse d'augmenter. Une méthode de détection, appelée méthode Doppler, ou méthode des vitesses radiales, consiste à observer la variation périodique de longueur d'onde d'une étoile. Le mouvement de l'étoile est dû à la présence d'une exoplanète. Quand l'étoile se dirige vers nous, et donc la planète vers l'arrière, les raies caractéristiques de son spectre se déplacent vers le bleu, et quand l'étoile s'éloigne, vers le rouge.



Nous considérons un système à deux corps constitué d'une étoile et d'une planète. Les deux astres sont dans un état lié gravitationnel. Menons une étude newtonienne. Chacun des corps tourne autour du centre de masse G du système. Nous pouvons fictivement nous ramener à un problème à un corps M de masse réduite μ qui orbite autour de G, point d'origine fixe dans le référentiel barycentrique :

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Loi de Kepler pour la particule fictive M :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\alpha}{4\pi^2 \mu} \quad \text{avec} \quad \alpha = G m_1 m_2$$

a : demi-grand-axe de l'ellipse parcourue par M.
T : période de révolution autour de G.
Nous trouvons ensuite les trajectoires des deux astres M_1 et M_2 en appliquant les facteurs d'homothétie suivant :

$$\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{GM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{GM}$$

Nous considérerons les cas d'un système à deux corps avec des orbites circulaires et un plan de révolution qui contient le lieu d'observation à longue distance de l'effet Doppler.
Prenons l'exemple d'une étoile un peu plus petite que le Soleil autour de laquelle gravite un Jupiter géant. Le Soleil est une petite étoile, une naine jaune, nous prendrons ici une naine orange de 0,8 masse solaire. Nous aurons une planète géante supermassive de 80 masses joviennes (cette planète peut s'apparenter à une naine brune, peu lumineuse et non détectable par des méthodes directes). L'étoile a, dans ce cas, une masse dix fois supérieure à celle de la planète. Il existe de nombreux systèmes stellaires de ce type : HD 87883, HD 4747, Epsilon Eridani, etc.

a - Déterminez la vitesse de l'étoile sur son orbite autour du barycentre du système. Montrez que cette vitesse est bien non-relativiste.

b - Donnez la limite classique de la formule de l'effet Doppler.

c - Quelle sera la variation relative de longueur d'onde $\Delta\lambda/\lambda$ de la lumière émise par la naine orange observée depuis la Terre dans son plan de révolution ?
Données : $G=6{,}67{,}10^{-11}N.m^2/kg^2$, $M_S=2.10^{30}$ kg, $M_J=M_S/1000$, $d_{G\text{-}Planète}=540.10^6$ km

Corr. p359.

5.√√ ▲▲▲ Calculs pour la règle mobile

Nous détaillons les calculs qui permettent de trouver l'expression exacte de la longueur apparente de la règle mobile sur la plaque photographique en fonction du temps. Nous nous appuyons sur les notations données dans le cours.
a - Déterminer les équations des lignes d'univers des extrémités E_1 et E_2 de la règle.
b - Nous cherchons à exprimer l'équation du cône passé de M(0, D, ct_M). Nous considérons le vecteur $\vec{u}=(a,b,1)$ avec $\sqrt{a^2+b^2}=1$ selon les génératrices du cône. Soit un point $C=(x,y,ct)$ du cône.
Nous avons deux contraintes, $\overrightarrow{MC}$ colinéaire à $\vec{u}$ et le point C appartient aux extrémités du ruban d'univers de la règle. En déduire la longueur apparente L_a en fonction de t.

Corr. p360.

6.√ ▲▲△ Transformation des vitesses et aberration de la lumière

a - À partir de la transformation de Lorentz déterminez les trois composantes de la vitesse dans *R'* en fonction de celles dans *R*.

$\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$, $\vec{v}'=(v_x',v_y',v_z')$ et $\vec{\beta}=\frac{\vec{u}}{c}=\frac{u}{c}\vec{i}$

À partir de la transformation des vitesses nous pouvons rapidement retrouver la formule de l'aberration relativiste de la lumière qui donne θ_a en fonction de θ.

b - Donner les composantes de la vitesse d'un photon qui parvient en O avec un angle θ par rapport à Ox.

c - Donner l'expression de $\vec{v}'$ et vérifiez que l'on a bien $\vec{v'}\cdot\vec{v'}=c^2$.

d - Exprimer $\tan\theta_a$ en fonction de θ.

Corr. p361.

7.√ ▲▲△ Transformation des vitesses et des accélérations. Généralisation 3D

a - Deux vaisseaux se déplacent à 50% de *c* et se croisent perpendiculairement en O dans *R*.
Quelle est leur vitesse relative ?

b - Dans le cas général de deux vaisseaux animés de vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, on ne perd pas en généralité en prenant $\vec{i}$ selon $\vec{v}_1$, $\vec{j}$ selon $\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2$ et $\vec{k}=\vec{i}\wedge\vec{j}$.
La direction entre les vitesses est donnée par l'angle

$\theta=(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2})$. Exprimez la vitesse relative v' en fonction de v_1, v_2 et θ. Application numérique pour deux vaisseaux de γ=2 et des trajectoires qui font un angle de 30°.

c - Nous reprenons l'énoncé de l'exercice *Deux vaisseaux* page 71.

1 - À partir de la vitesse $\vec{v}$ dans *R*, retrouver, avec les lois de transformation des vitesses, la vitesse *v'* du vaisseau *B*.

2 - Établir la loi de transformation des accélérations en trois dimensions. À partir de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ dans *R*, retrouver l'accélération *a'* du vaisseau *B*. *Corr. p362.*

8.√ ▲▲△ Ciel étoilé à mi-parcours

Nous entreprenons notre voyage pour Proxima du Centaure avec une accélération d'un *g*. Comme nous le montrerons au chapitre suivant la vitesse vaut alors 95% de *c* à mi-parcours (après 2 a.l. parcourues dans le référentiel galactique). Nous nous demandons si le Soleil et Proxima du Centaure sont à ce moment-là visibles à l'œil nu depuis le vaisseau. En astronomie on utilise la magnitude apparente pour déterminer l'éclat d'une étoile. Une étoile de magnitude supérieure à 6 est invisible à l'œil nu. L'étoile Véga est prise comme référence avec une magnitude nulle. Une étoile plus lumineuse que Véga a donc une magnitude négative.

Formule de la magnitude M : $M=-2{,}5\log(L/L_0)$.

L et L_0 sont les luminosités de l'étoile et de Véga perçues au point d'observation.
La luminosité L_V de Véga, grandeur qui correspond à la puissance totale émise, est exprimée comme un multiple de celle L_S du Soleil : $L_V = 37L_S$.
Distance Véga-Soleil : D_{VS}=25 a.l.
Pour Proxima du Centaure : $L_P = 5.10^{-5}L_S$.
La luminosité perçue d'une étoile diminue avec la distance, et, est inversement proportionnelle au carré de celle-ci.

a - Déterminer la magnitude apparente de l'étoile Proxima du Centaure depuis la Terre. L'étoile est-elle visible à l'œil nu ?

b - Déterminer la magnitude apparente de Proxima du Centaure à mi-parcours si le vaisseau spatial était immobile par rapport aux étoiles. L'étoile serait-elle visible à l'œil nu ?

c - Déterminer la magnitude apparente de Proxima du Centaure à mi-parcours quand le vaisseau va à 95% de *c*. L'étoile sera-t-elle visible à l'œil nu ?

d - Déterminer la magnitude apparente du Soleil à mi-parcours si le vaisseau spatial était immobile. Le Soleil serait-il alors visible à l'œil nu ?

e - Déterminer la magnitude apparente du Soleil à mi-parcours quand le vaisseau ira à 95% de *c*. Le Soleil sera-t-il alors visible à l'œil nu ?

f - Vous voilà arrivé sur l'exoplanète Proxima b en orbite autour de l'étoile Proxima du Centaure. Un repos bien mérité. Verriez-vous le Soleil dans le ciel nocturne ? *Corr. p366.*

9. $\frac{01}{10}$ ▲▲△ Simulation numérique du ciel

Dans le modèle analytique du cours nous avons une distribution continue d'énergie lumineuse pour modéliser le ciel étoilé. Ici nous aurons une distribution discrète d'étoiles considérées ponctuelles. Nous prendrons N=10 000 étoiles, identiques, monochromatiques, et, distribuées aléatoirement et uniformément.
Ce modèle numérique permet de mieux appréhender la perception du ciel depuis le vaisseau en mouvement, de mieux comprendre la signification des calculs d'intégrales et de les vérifier.

a - Loi de probabilité sphérique uniforme : Nous plaçons les étoiles sur la sphère céleste à l'aide de deux angles θ, la colatitude, et φ, la longitude. Ce sont les coordonnées sphériques. Le positionnement est analogue à celui utilisé pour se repérer à la surface de la Terre. La colatitude vaut zéro au pôle Nord céleste, 90° à l'équateur céleste et 180° au pôle Sud. La longitude vaut 0° à un méridien pris pour origine et y retourne après un tour complet de 360°. Proposer des lois de probabilités Θ et Ψ qui assurent une distribution uniforme sur la sphère céleste en fonction de la loi uniforme continue $U(0,1)$[9].

b - On utilise une feuille de calcul et la fonction qui génère un nombre aléatoire entre 0 et 1. Sur les deux premières colonnes nous avons N valeurs pour θ et

9 Pour les lois de probabilité et leur simulation, voir, par exemple, le livre *Calcul d'incertitudes*, du même auteur, pages 109 et 118.

pour φ. Nous calculons ensuite pour les N étoiles θ_a et l_a avec les formules du cours. Vous pouvez ainsi retrouver les valeurs, pour une vitesse de 50% de *c*, de l'énergie et du nombre de photons totaux reçus par rapport au repos.

Correction p367.

10.√√ ▲▲▲ Un peu de maths...

Pour faire de la physique en enseignement supérieur il faut être à l'aise avec les maths et je préfère tout mettre sur la table dans le même ouvrage pour être clair et vous éviter de multiples tergiversations. La nature est logique, la logique est mathématique, adonnons-nous, donc, à un peu de trigonométrie.

Selon la relation entre *y'* et *x'* donnée page 88 :

θ appartient à $]0, \pi[$ et $\tan\theta_a = \dfrac{\sin\theta}{\gamma(\beta+\cos\theta)}$ si le dénominateur est positif. θ_a appartient alors à $]0, \pi/2[$ et dans ce cas : $\beta+\cos\theta>0$ soit $0\leq\theta<\theta_0$ avec $\theta_0 = arcos(-\beta)$.

Si le dénominateur est négatif. θ_a appartient à $]\pi/2, \pi[$ et dans ce cas $\theta_0<\theta\leq\pi$ alors :

$$\tan(\pi-\theta_a) = \frac{\sin\theta}{-\gamma(\beta+\cos\theta)}$$

Voilà qui est bien compliqué. La fonction tangente est constituée d'une infinité de branches, et, donc, pour une valeur de la tangente il y a une infinité d'angles possibles. Une calculatrice classique donne la valeur de l'angle sur la branche centrale sur $]-\pi/2,$

$\pi/2[$. Notre angle d'observation des étoiles est entre $-\pi$ et π, et par symétrie nous restreignons à $]0, \pi[$. Nous sommes alors sur deux branches de la tangente. Pour résoudre cet épineux et passionnant (!) problème nous préférons avoir $\tan(\theta/2)$, car $\theta/2$ appartient à $]0, \pi/2[$. Nous restons sur la même branche centrale dont les valeurs sont données par les calculatrices.

a - Après avoir rappelé les expressions de cos(a+b) et sin(a+b) donnez l'expression de tan(a+b) en fonction tan(a) et tan(b).

b - En déduire $\tan(\theta)$ en fonction de $\tan(\theta/2)$.

c - Résoudre une équation du second degré pour montrer que $\tan(\theta_a/2)=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\tan(\theta/2)$.

Corr. p368.

11.√√ ▲▲▲ Répartition de l'énergie

Nous établissons ici les formules donnant l'énergie reçue depuis le ciel étoilé dans le référentiel du vaisseau en fonction de β.

a - Utilisez la relation entre θ_a et θ pour exprimer $d\theta$ en fonction de $d\theta_a$ et θ_a. En déduire comment l'angle solide $d\Omega=2\pi\sin\theta\, d\theta$ se transforme dans le référentiel du vaisseau. Vous pourrez exprimer $d\Omega$ en fonction de $d\Omega_a$ et θ_a. Le facteur nous donne la densité d'étoiles *n* en fonction de θ_a. Exprimez cette densité à la poupe et à la proue en fonction de β, puis faites une application numérique pour β=0,5.

b - Vérifier en intégrant sur tout l'espace que le nombre d'étoiles reste bien constant quand le vaisseau prend de la vitesse.

c - Retrouvez l'expression de E_α en fonction de β du cours.

d - Déterminer comment se répartit l'énergie entre les hémisphères avant et arrière du vaisseau. Expression en fonction de β, puis application numérique pour β=0,5.

Correction p369.

12.√√ ▲▲▲ Nombre de photons

Le nombre de photons parvenant chaque seconde sur le vaisseau est proportionnel à gamma. Dans le cadre du modèle de photons jaunes émis uniformément dans le référentiel galactique, dans le référentiel en mouvement, les photons sont plus nombreux et de fréquences différentes. Ils sont chaque fois moins nombreux et de faible énergie vers l'arrière et chaque fois plus nombreux et énergétiques vers l'avant.

a - Par un calcul d'intégrale complet retrouver le facteur : $N_\alpha/N=\gamma$. Vous pouvez utiliser un logiciel de calcul symbolique.

b - Quelle proportion de photons est reçue depuis l'hémisphère avant ? Calcul en fonction de β, puis application numérique pour β=0,5.

Corr. p371.

13.√ ▲▲▲ Puissance émise par une étoile

Pour obtenir la puissance totale émise nous intégrons la luminance *i* sur toutes les longueurs d'ondes, angles solides et surfaces :

$$P = \int i(\lambda)\, d\lambda\, d\Omega\, dS$$

L'expression de la luminance est donnée page 93.
Pour un corps noir, une surface élémentaire *dS* émet uniformément sur un demi-espace, soit un angle solide intégré de 2π.

a - Dans le cas du Soleil, retrouvez-vous une puissance totale émise de 4.10^{26} W ? La température de surface est prise égale à T_S=5000 K et le rayon solaire R_S=700 000 km. Vous pouvez estimer l'intégrale par un calcul numérique.

b - Comment se répartit la puissance émise par le Soleil entre le visible, l'infrarouge (>800 nm) et l'UV (>400 nm) ?

c - Pour Proxima du Centaure, nous prenons T=3000K et R=0,14 R_S. Nous lisons sur la page Wikipédia de Proxima Centauri que "sa luminosité totale est égale à 0,17% de celle du Soleil". Votre calcul confirme-t-il cette assertion ?

Corr. p372.

5

Le mouvement accéléré

Nous avons pour l'instant étudié des vaisseaux en mouvement rectiligne uniforme : un objet animé d'une vitesse constante et qui se déplace selon une droite. Pour des voyages interstellaires réalistes la trajectoire peut rester rectiligne, mais, par contre, la vitesse varie nécessairement. Nous allons nous intéresser au mouvement rectiligne uniformément accéléré : le vaisseau a une accélération constante, la vitesse varie constamment de la même quantité. Nous pouvons ainsi créer une pesanteur artificielle dans la fusée : nous considérerons le cas où la vitesse augmente (ou diminue) de 10 m/s toutes les secondes.

Étude d'un référentiel accéléré

Les principes de base de la relativité restreinte sont posés pour des référentiels d'inertie. Une fois que nous disposons d'un référentiel d'inertie de référence tous les référentiels en translation rectiligne et uniforme par rapport à ce dernier sont aussi des référentiels d'inertie. Un référentiel accéléré par rapport à un référentiel d'inertie n'appartient pas à cet ensemble, ce qui n'empêche pas d'y appliquer

la relativité restreinte de manière indirecte si l'on connaît le mouvement de ce référentiel par rapport à un référentiel d'inertie de référence que nous nommerons *R*. On procède de même en mécanique newtonienne, la relation fondamentale de la dynamique $\vec{F}=m\vec{a}$ n'est valide que dans les référentiels d'inertie et pour autant on utilise les lois de Newton pour étudier tout type de mouvement dans tout type de référentiel.

La mécanique classique est utilisée pour construire la relativité restreinte en l'utilisant comme limite des faibles vitesses. De plus, s'ajoute, comme élément de construction, le principe d'additivité des temps propres sur la ligne d'univers d'une particule. Avec ce principe, nous ne sommes pas limités aux référentiels d'inertie : le référentiel propre de la particule peut avoir un mouvement quelconque (c'est l'hypothèse de l'horloge vue page 19).

Soit : $\tau=\int d\tau=\int\frac{dt}{\gamma}$ où τ est le temps propre dans le référentiel propre de la particule, t est le temps dans le référentiel d'inertie de référence et γ est exprimé en fonction de la vitesse instantanée v de la particule dans ce même référentiel.

À un instant t quelconque il existe toujours un référentiel d'inertie nommé *R'* qui coïncide avec le référentiel propre. Le référentiel *R'* à un vitesse v constante par rapport à *R* et, au moment où il coïncide avec le référentiel propre, la particule a une vitesse nulle dans *R'*. Son accélération vaut *a'* et celle dans *R* vaut alors $a=\frac{a'}{\gamma^3}$ (démontré page 69).

C'est là qu'intervient la mécanique classique, en effet, la particule a alors dans *R'* une vitesse faible entre t et $t+dt$. C'est comme si un vaisseau accéléré doublait un vaisseau qui avance à vitesse constante. Si au moment où ils sont au même niveau leurs vitesses sont égales, leur vitesse relative est nulle. Le vaisseau accéléré par la poussée de ses réacteurs s'éloigne ensuite lentement par rapport à la vitesse de la lumière et nous pouvons utiliser la mécanique classique pour étudier le mouvement du vaisseau accéléré depuis l'autre vaisseau pris comme référence.

Prenons l'exemple d'une voiture d'abord immobile au feu rouge et qui accélère ensuite au vert. Depuis le référentiel de la route l'accélération du mobile vaut $\vec{a}$, mais quelle est l'accélération ressentie par le passager dans le référentiel propre de sa voiture ?

D'après la loi de composition classique des accélérations : $\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c$ où nous avons l'accélération absolue, relative, d'entraînement et de Coriolis.

Écrivons la deuxième loi de Newton dans *R'* :

$\vec{F}=m(\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c)$ et $m\vec{a}_r=\vec{F}+\vec{F}_{ie}+\vec{F}_{ic}$.

Dans un référentiel accéléré, non galiléen, on ressent de nouvelles forces, appelée forces d'inertie. Ici les accélérations $\vec{a}_r$ et $\vec{a}_c$ sont nulles car le passager est immobile dans sa voiture. Le conducteur ressent une force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}=-m\vec{a}_e$ qui le plaque au démarrage au fond de son fauteuil. Ceci est dû à l'accélération d'entraînement qui égale celle de la

voiture : $\vec{a}=\vec{a}_e$. Pour la même raison, l'accélération ressentie par la particule dans son référentiel propre vaut aussi $\vec{a'}$, accélération de la particule dans *R'*.

∞ Pesanteur artificielle

Quand la voiture accélère au vert, tout se passe comme si, une force exercée à distance tirait le conducteur vers l'arrière de la voiture. Comme une force à distance, analogue dans ces effets à une force gravitationnelle due à une masse placée à l'arrière de la voiture. Quand un vaisseau spatial démarre au vert à un carrefour interstellaire, les passagers d'abord en apesanteur sont ensuite plaqués lors de la phase d'accélération aux parois perpendiculaires au déplacement. Dans notre cas l'accélération est maintenue et le vaisseau a un *mouvement rectiligne uniformément accéléré*.

L'accélération vaut celle de la pesanteur *g*, ainsi :

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{g}{\gamma^3} \quad \text{et} \quad \tau=\int \frac{\gamma^2}{g}dv=\frac{c}{g}\int \frac{d\beta}{1-\beta^2}$$

soit $\tau=\frac{c}{g}\int_0^{\beta}\left(\frac{1/2}{1-\beta}+\frac{1/2}{1+\beta}\right)d\beta$ et $\boxed{\tau=\frac{c}{2g}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)}$

où $v=\beta c$ est la vitesse atteinte dans *R* après un temps propre τ.

Exprimons la distance x parcourue dans R en fonction $\mathbf{v}$:

$$v=\frac{dx}{dt} \quad \text{d'où} \quad x=\int dx=\int \frac{\gamma^3}{g} v\, dv=\frac{c^2}{g}\int \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} d\beta$$

et après intégration : $\boxed{x=\frac{c^2}{g}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)}$

Pour être complet, calculons le temps galactique t :

$$t=\int dt=\int \frac{\gamma^3}{g} dv=\frac{c}{g}\int \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} d\beta$$

Nous effectuons le changement de variable $\beta=\sin\theta$ et nous trouvons :

$$\boxed{t=\frac{c}{g}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Nous pouvons maintenant exprimer la position, la vitesse et l'accélération en fonction du temps t :

$$\begin{cases} x = \dfrac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}}-1\right] \\ v = \dfrac{c}{\sqrt{1+\dfrac{c^2}{g^2t^2}}} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \sqrt{1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}} \\ a = \dfrac{g}{\left(1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \dfrac{g}{\gamma^3} \end{cases}$$

Nous pouvons aussi exprimer le temps propre τ en fonction du temps galactique t :

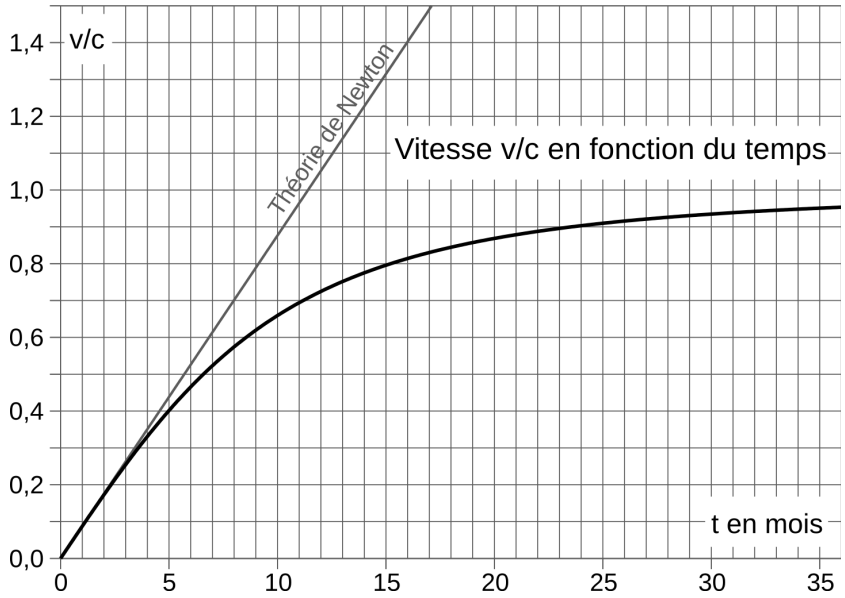
$$t = \frac{c}{g}\gamma\beta \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{c}{g}\ln\left(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}+\frac{gt}{c}\right)$$

$$\text{et} \quad \tau = \frac{c}{g}\,argsh\left(\frac{gt}{c}\right)$$

$$t = \frac{c}{g}sh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \qquad x = \frac{c^2}{g}\left[ch\left(\frac{g\tau}{c}\right)-1\right]$$

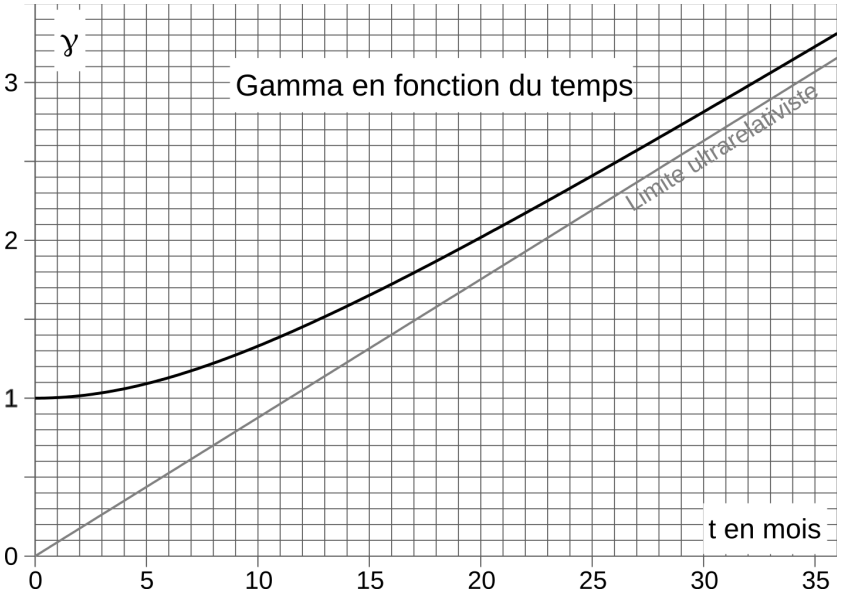
$$(ct)^2-\left(x+\frac{c^2}{g}\right)^2=\left(\frac{c^2}{g}\right)^2$$

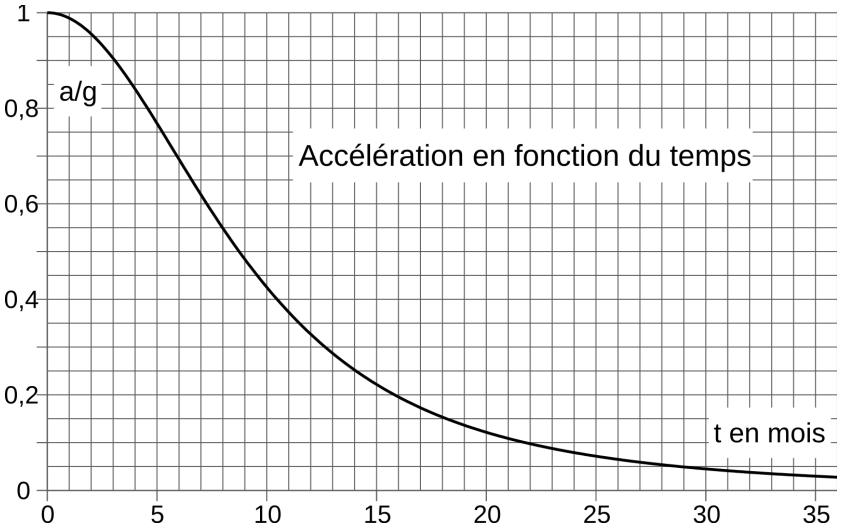
Courbes :



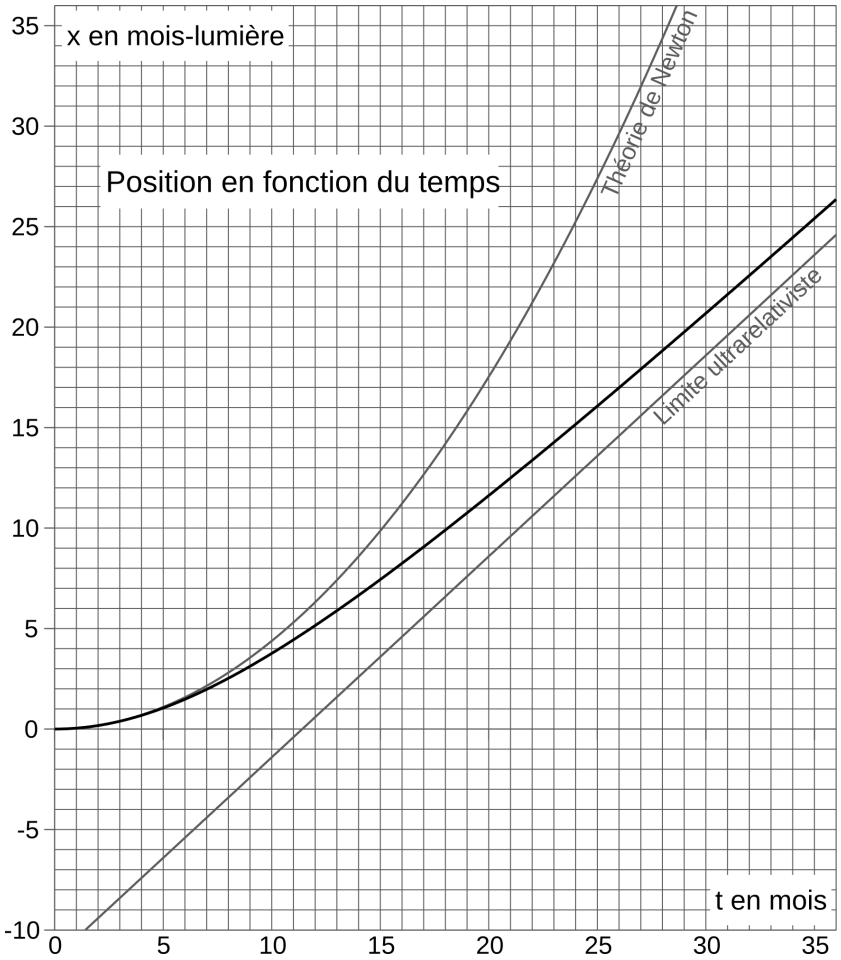
La vitesse tend vers la vitesse maximale *c*. Pour les faibles vitesses, celle-ci augmente linéairement avec le temps, nous retrouvons la limite classique $v = gt$.

Page suivante, la variation du facteur de dilatation temporel en fonction du temps galactique. Nous avons une tangente horizontale aux petites vitesses. Quand la vitesse augmente, on tend vers l'asymptote ultrarelativiste $\gamma \sim gt/c$, γ varie alors linéairement avec le temps galactique.


γ
Gamma en fonction du temps
Limite ultrarelativiste
t en mois
0
1
2
3
0
5
10
15
20
25
30
35

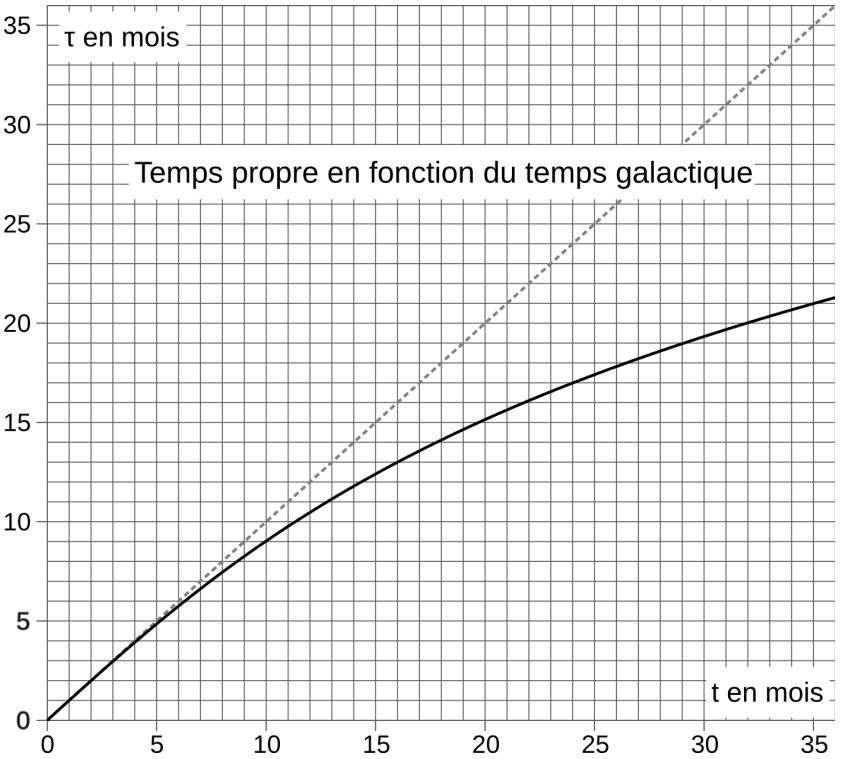

a/g
Accélération en fonction du temps
t en mois
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
0
5
10
15
20
25
30
35

Page précédente, l'accélération du vaisseau vue depuis le référentiel de départ. Bien que l'accélération reste constante dans le référentiel propre, observée depuis la Terre, la vitesse plafonne et l'accélération diminue en gamma cube. Nous avons une tangente horizontale aux petites vitesses, une limite à l'infini nulle et un point d'inflexion en $t=c/2g$.



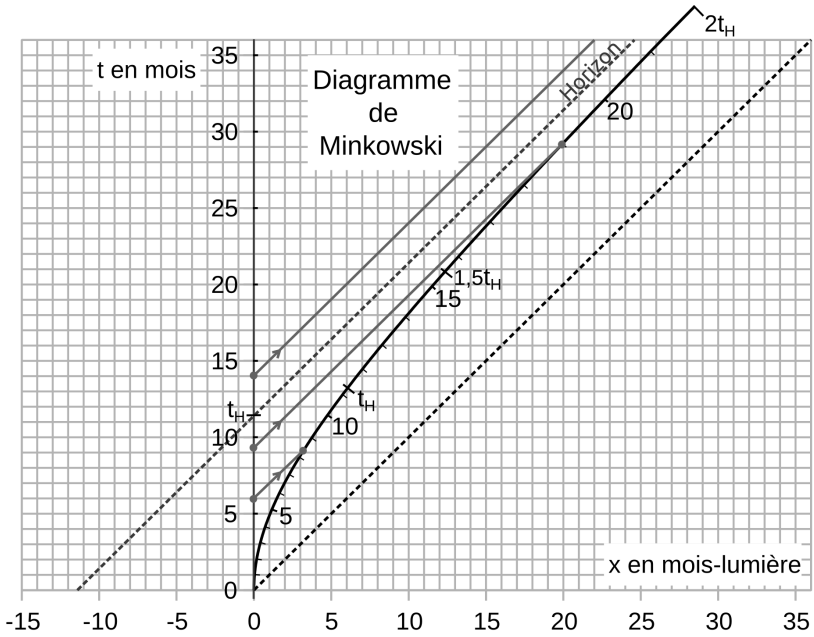
Page précédente, nous voyons, après 6 mois, la position s'éloigner des prévisions de la mécanique classique. Dans la théorie de Newton nous avions une branche parabolique alors que dans le cadre de la relativité restreinte nous avons une branche hyperbolique avec une asymptote ultrarelativiste $x=c\,t-c^2/g$ où la distance galactique parcourue augmente linéairement avec le temps.

Ci-dessous, le temps du voyageur accéléré en fonction de celui de ceux restés sur Terre :



Notion d'horizon :

Nous obtenons le diagramme de Minkowski en inversant simplement les axes $\mathbf{x}$ et $\mathbf{t}$. Nous constatons que l'asymptote $t = x/c + c/g$ représente un horizon. Pour les observateurs terrestres, impossible de communiquer avec le vaisseau après un temps $t_{\lim} = c/g$ (environ 11,4 mois). En effet, après cette durée, un photon ne pourra plus parvenir au vaisseau. Par contre les occupants du vaisseau accéléré pourront continuer à nous envoyer des messages tout au long de leur parcours. Ils pourront aussi recevoir en permanence des messages de la Terre, mais ils seront antérieurs à $t_{\lim}$.



Au fur et à mesure que le temps propre τ augmente, les astronautes voient les habitants de la Terre ralentir leurs mouvements et se figer au temps limite $t_{\lim}$.

∞ VOYAGE ALLER-RETOUR

Nous voulons rejoindre une exoplanète à distance D de notre planète Terre. Nous serons en pesanteur artificielle sur l'ensemble du voyage aller-retour. Nous accélérons sur la première moitié du voyage puis, après avoir retourné le vaisseau, nous décélérons jusqu'à l'exoplanète. Nous répétons la procédure inverse pour le retour.

Première phase : $\frac{D}{2}=\frac{c^2}{g}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{max}^2}}-1\right)$

Vitesse maximale à mi-parcours :

$$\beta_{max}=\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{g\,D}{2\,c^2}\right)^2}}$$

(pour D=4 années-lumière, $\beta_{max}\simeq 95\%$ et $\gamma\simeq 3$)

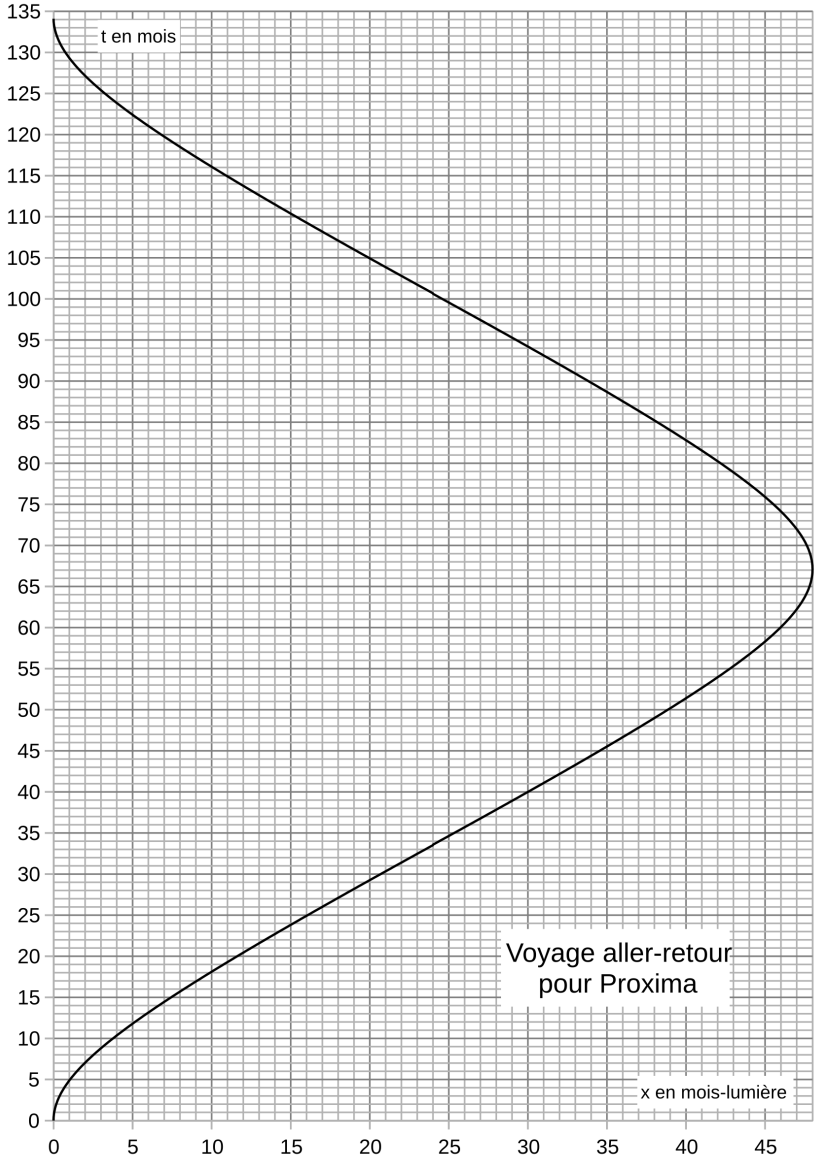
Durée T du voyage aller-retour :

$$\frac{T}{4}=\frac{c}{g}\frac{\beta_{max}}{\sqrt{1-\beta_{max}^2}} \quad \text{et} \quad T=\frac{4\,c}{g}\sqrt{\left(1+\frac{g\,D}{2\,c^2}\right)^2-1}$$

Temps propre τ pour l'aller-retour :

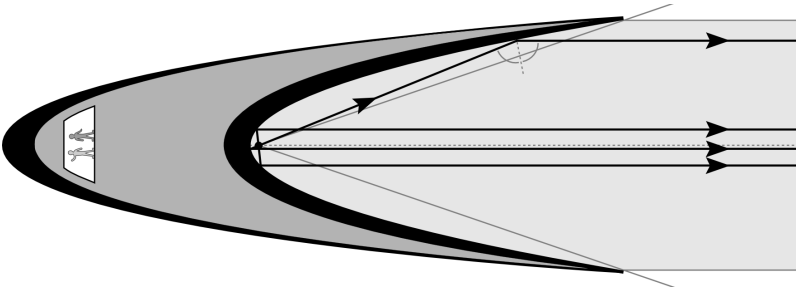
$$\tau = \frac{2c}{g} \ln\left(\frac{1+\beta_{max}}{1-\beta_{max}}\right) = \frac{4c}{g} argth\,\beta_{max}$$

(pour D=4 a.l., T≃11,2 ans et τ≃6,84 ans)



La fusée photonique :

Un faisceau lumineux, créé par la fusée, la propulse par réaction. Par exemple, matière et antimatière, à parts égales, sont placées au foyer d'un miroir parabolique, et, produisent par annihilation une énergie pure projetée vers l'arrière selon un faisceau parallèle.

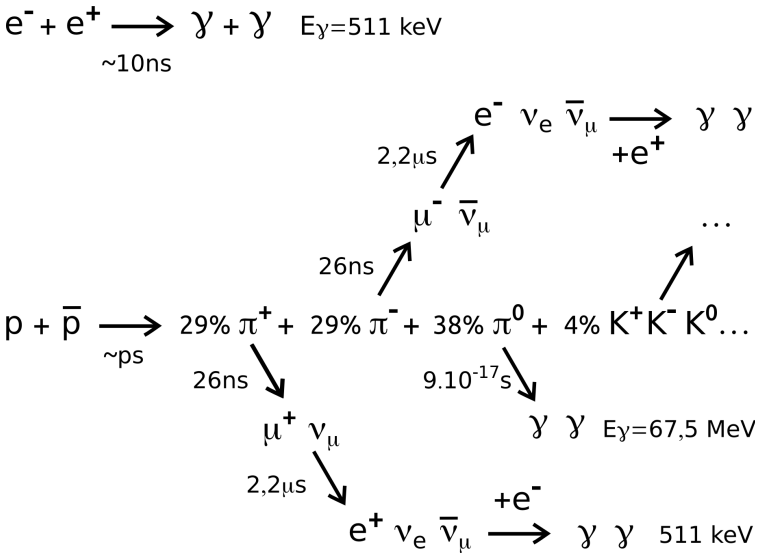


Considérons le cas suivant, une particule et son antiparticule se rencontrent et créent deux photons qui partent en sens opposés. L'un vers l'arrière, et l'autre vers l'avant. Celui vers l'arrière ne contribue pas à la propulsion, par contre, le second, y contribue doublement, car la réflexion sur le miroir est supposée parfaite. En moyenne, chaque photon transfert son impulsion à la fusée. Des particules ultra-relativistes sont tout aussi efficaces que leur énergie de masse convertie en lumière.
De manière plus réaliste, un photon est parfois absorbé par le *bouclier gamma*. Le rendement est alors de 50 %. Aussi, une partie de l'énergie des *rayons gamma* absorbés peut être réutilisée pour chauffer un gaz à très haute température.

L'agitation thermique génère une vitesse d'éjection très importante[10].
Par contre, si un neutrino est créé par la réaction, il emporte une énergie perdue pour la propulsion.

La fusée photonique s'approche du modèle parfait, nous pouvons sinon parler de *fusée à antimatière*.

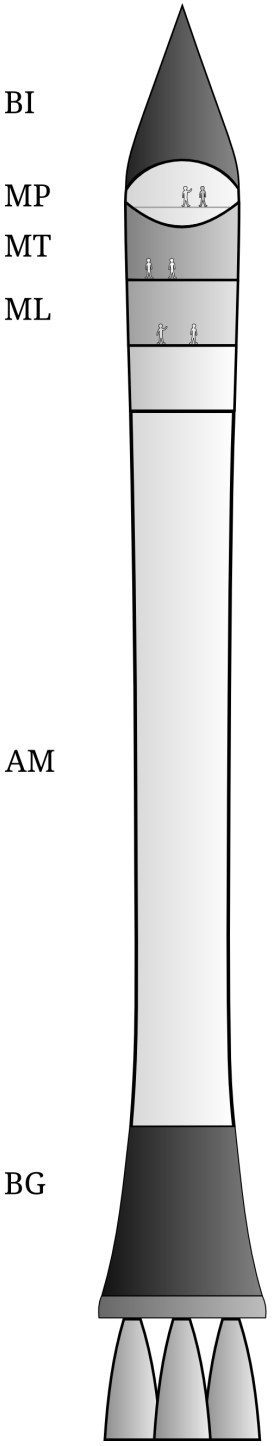
Réactions d'annihilation

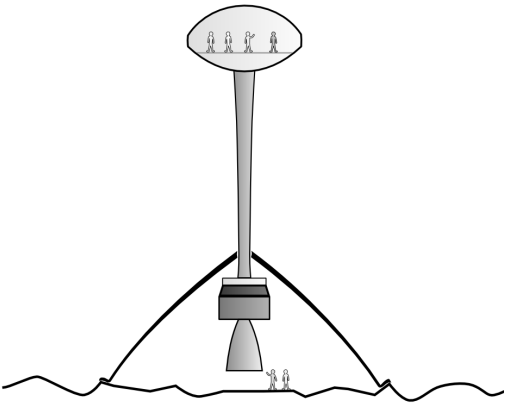


L'annihilation proton-antiproton est plus complexe et crée des cascades de particules. Des photons γ, encore plus énergétiques que pour l'annihilation électron-positon, sont créés.

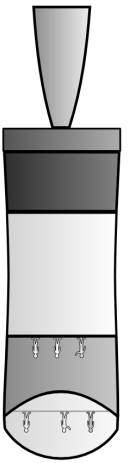
10 La NASA propose une fusée propulsée par un réacteur à positrons. Ceux-ci s'annihilent avec des électrons en photons gamma. La chaleur produite chauffe de l'hydrogène liquide. *www.nasa.gov*

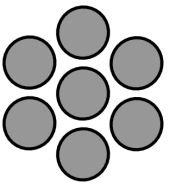
la fusée
à
antimatière





Proxima b





Caractéristiques techniques :

Voyage Aller Proxima Centauri / Distance 4,2 al.
Durée Voyageur 3,3 ans - Galactique 5,5 ans.

Astronautes : 6.
Module pressurisé : 3 / 10t / 6mx10m
Module Principal - Module Technique - Module Loisir

Hauteur totale 126m/ Diamètre 15m / Masse totale 2420t / Masse utile 20t / Masse antimatière 1200t.

Antimatière : Proximium / densité 0,2 / 200 kg/m^3.
Matière : Tout, hors masse utile, est petit à petit annihilé avec le Proximium (boucliers, moteurs, etc).

Accélération max 3 g / Vitesse max 89 % de c / γ_{max} 2,2 / Périodes Accélération : a_{moy} 2 g, sommeil 2,8 g/ Périodes Vitesse : a_{moy} 0,3 g, sommeil zéro g.

Bouclier Interstellaire : 140t / Protège du milieu interstellaire 0,6 proton/cm^3 / angle au sommet 38° / T_{max} 498°C.
Ce bouclier est utilisé sur la première moitié du parcours. Après retournement, les moteurs sont vers l'avant, et la pression de radiation écarte le milieu interstellaire.

Bouclier Gamma : 860t / Protège les passagers et le Proximium des rayons γ émis par les moteurs / Blindage Pb de 20 cm, ou béton 1,2 m, diminue le flux par un facteur 10^6.

Moteur-Fusée : rendement 50 % / 1ère phase 7 M P-2 / Poussée 10 MN / $D_{e\ 1g\ max}$ 11 g/s Proximium / 2em 1 M P-2 / 3ème 1 M P-1 Poussée 2 MN / v_e=150 000 km/s.

Comparaison :
Saturn V / M=3038t / H=111m / D=10m / M_{ergols}=2829t / P_{max} 34 MN / 1er ét. 5 Moteurs F-1 v_e=2,6 km/s D_e=13,6 t/s Kérosène~O_2(l) / 2ème 5 M J-2 / 3ème 1 M J-2 v_e=4,1 km/s H_2(l)~O_2(l) / Durée 11 min 30 s de 0 à 164 km.

Exercices

1. ▲△△ Mi-temps

Au départ de la Terre, le vaisseau rejoint Proxima selon un mouvement uniformément accéléré en deux temps : la fusée coupe ses réacteurs à mi-parcours, le temps de se retourner, et arrive ensuite à vitesse nulle au niveau de Proxima.
Par rapport aux étoiles considérées fixes, quelle sera la distance parcourue à la moitié du temps écoulé avant le point de retournement ? Le résultat est-il modifié selon que l'on considère le temps d'un observateur fixe par rapport aux étoiles, ou bien, celui d'un observateur fixe par rapport à la fusée ? Qu'en est-il en mécanique classique ?
Nous prenons, comme à l'accoutumée, les valeurs suivantes : D=4al, a=g=10m/s^2 et c=3.10^{8}m/s.

Corr. p374.

2. ▲▲△ Téléréalité

Le 1er janvier 2100 à 12h00 l'équipage du vaisseau Galaxys part à accélération constante pour l'autre bout de la Voie Lactée.
Tous les jours sur Terre une émission de téléréalité conte les aventures vécues par les astronautes. Et réciproquement les astronautes réalisent aussi une émission quotidienne avec les informations parve-

nues de la Terre pendant une journée propre au vaisseau. Mais de part les dilatations temporelles, pendant une journée sur Terre on ne reçoit pas les infos d'une journée entière vécue au bord du vaisseau, et vice versa. Des signaux lumineux sont utilisés pour transmettre les informations.

a - Préambule : Déterminez l'expression de la position x en fonction de γ, puis celle de γ en fonction de τ.

b - Émissions de télé-réalité sur Terre :

1- Soit t_{obs} l'instant où le message qui correspond à un temps propre τ est reçu (l'instant t est simultané à τ mais la réception du message de part la propagation à vitesse finie de l'onde est bien sûr ultérieure). Illustrez la situation sur un diagramme de Minkowski à l'aide des différentes lignes d'univers (Terre / Vaisseau / Photons).

2- Exprimez t_{obs} en fonction de τ, puis τ en fonction de t_{obs}.

3- Six mois après leur départ les astronautes envoient un message vers la Terre. Combien de temps après le départ le message est-il reçu sur Terre ?

4- Un an après le départ, les émissions quotidiennes de téléréalité correspondront à quel temps passé dans le vaisseau ? Même question dix ans après le départ.

c - Émissions de télé-réalité dans le vaisseau :

1- Soit τ_{obs} l'instant où est reçu le message qui

correspond à un temps terrestre t. Illustrez sur un diagramme de Minkowski.

2- Exprimez τ_{obs} en fonction de t.

3- Six mois après le départ un message est envoyé aux astronautes. Combien de temps après leur départ le reçoivent-ils ?

4- Un an après le départ, les émissions quotidiennes de téléréalité correspondront à quel temps passé sur Terre ? Même question dix ans après le départ.

d - Effet Doppler pour un référentiel accéléré :

Tant depuis de la Terre que depuis le vaisseau un signal lumineux bleu est régulièrement émis (λ=400 nm).

1- Établir les relations entre la fréquence émise et la fréquence reçus pour les deux référentiels, celui d'inertie et celui accéléré.

2- Après combien de temps le signal émit depuis la Terre sera perçu comme rouge au bord du vaisseau (λ=800 nm) ?

3- Pour la même durée écoulée sur Terre, quelle sera la couleur du signal lumineux reçu ?

4- L'effet Doppler est-il symétrique comme dans le cas des référentiels d'inertie ?

Correction p375.

3. ▲▲△ Face-à-face

Deux vaisseaux effectuent en sens inverse, au même moment et dans les mêmes conditions, les parcours

de Terre-Proxima et Proxima-Terre. Les fusées sont animées de mouvements uniformément accélérés et effectuent le voyage comme décrit dans ce chapitre.

a - À mi-chemin, au point équidistant, à deux années-lumière, les vaisseaux ont coupé leurs réacteurs pour se retourner. Quelle est la vitesse galactique des vaisseaux ? Quelle est leur vitesse relative ?

b - Même questions au quart du chemin.

c - Proposez un moyen technique qui permettrait aux vaisseaux de mesurer leur vitesse relative.

d - Exprimez la vitesse galactique $\mathbf{v}$ en fonction du temps propre τ.

e - Exprimez la vitesse relative $\mathbf{v}_r$ en fonction du temps propre τ.

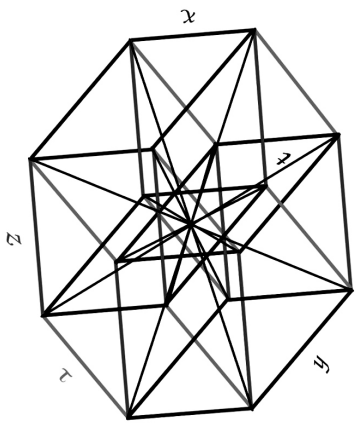
f - Déterminez l'accélération $\mathbf{a}_r$ du vaisseau en provenance de Proxima du point de vue du référentiel du vaisseau en provenance de la Terre en fonction du temps propre τ.

Déterminer cette accélération relative au départ, à mi-chemin et au quart du temps du voyage aller des spationautes.

Le mouvement relatif des vaisseaux est-il uniformément accéléré ?

Quels résultats trouverions-nous dans le cadre de la mécanique newtonienne ?

Correction p379.


x
w
z
y
v

6

MÉTRIQUES

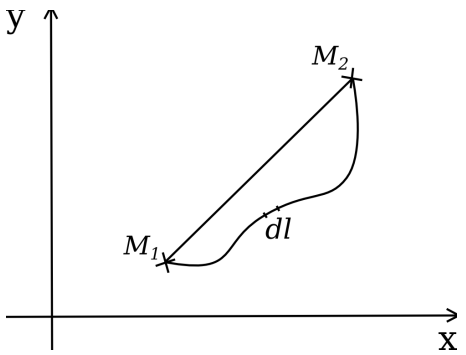
Une métrique permet de mesurer des distances. En relativité, l'outil est généralisé à l'espace-temps. Nous donnerons la métrique du référentiel d'inertie, du référentiel uniformément accéléré en translation rectiligne, et, celle du référentiel en rotation uniforme. Nous pourrons alors déterminer la structure d'espace-temps dans notre vaisseau en route vers Proxima. Quelles seront les propriétés géométriques dans le vaisseau spatial ? Comment s'écoule le temps aux différents étages de la fusée ?
Finalement, nous ferons un parallèle avec la métrique du trou noir et jetterons ainsi un pont vers la relativité générale.
Pour répondre à ces questions nous allons introduire le concept de métrique à travers divers exemples.

∞ MÉTRIQUE EUCLIDIENNE

Nous allons mesurer la distance entre deux points. La métrique peut être exprimée dans différents systèmes de coordonnées pour calculer une distance, elle, invariante. Prenons le cas de deux points M_1 et M_2 disposés sur un plan. Si les coordonnées des points sont cartésiennes, $M_1(x_1, y_1)$

et $M_2(x_2, y_2)$, la distance est donnée par :

$$L = d_{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Nous pouvons aussi déterminer la longueur d'une trajectoire courbe prise par une particule en intégrant entre les deux points :

$$L = d_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} dl \quad \text{avec} \quad dl^2 = dx^2 + dy^2$$

Cet élément dl^2 est notre métrique pour cet exemple.

Dans le cas où notre problème physique a une symétrie centrale (cas courant, comme pour le mouvement des planètes), les coordonnées polaires peuvent être mieux adaptées. Nous aurons le même résultat final, seulement, dans un cas le calcul peut être très long, et dans l'autre, très court. En coordonnées polaires ces mêmes points ont pour coordonnées $M_1(r_1, \theta_1)$, $M_2(r_2, \theta_2)$ et $dl^2 = dr^2 + (r\,d\theta)^2$. En utilisant les relations de passages, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, nous retrouvons la métrique cartésienne,

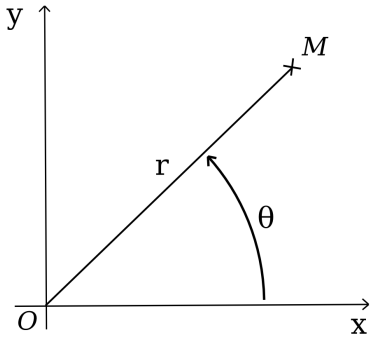
les démarches sont bien équivalentes.

Coordonnées cartésiennes :

$M(x,y)$
$x \in]-\infty\ ;\ +\infty[$
$y \in]-\infty\ ;\ +\infty[$

Coordonnées polaires :

$M(r,\theta)$
$r \in [0\ ;\ +\infty[$
$\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$



En géométrie euclidienne la longueur d'un objet (tout comme la durée d'un phénomène) est la même pour tous les observateurs. Que l'on effectue une translation, une rotation, ou une transformée de Galilée des coordonnées, la longueur L est invariante (fait en exercice page 159).

De manière plus générale les lois de la mécanique Newtonienne sont invariantes selon ces transformations.

Ce n'est pas le cas pour une dilatation : si $x'=kx$, $y'=ky$ et $z'=kz$ avec k le facteur de dilatation, alors $dl'^2=dx'^2+dy'^2+dz'^2$, $dl'=k\,dl$ et $L'=kL$. Les lois de la physique dépendent de l'échelle, elles ne sont pas les mêmes pour l'infiniment petit et l'infiniment grand.

La ligne droite correspond au chemin le plus court entre deux points. Nous pouvons prendre une corde et la tendre pour obtenir une droite. C'est le chemin entre M_1 et M_2 qui minimise L.

La métrique Euclidienne correspond à un espace plat : La somme des angles d'un triangle vaut 180°, le rapport entre le périmètre et le diamètre d'un cercle vaut π, et toute droite possède une unique droite parallèle passant par un point qui lui est extérieur.

∞ Métrique sur une sphère

Pour mieux illustrer notre propos prenons le cas d'un espace bidimensionnel sphérique. Il faut se mettre à la place d'êtres bidimensionnels (les bidiz) qui vivent à la surface de la sphère et n'ont pas conscience de la troisième dimension. Les postulats d'Euclide ne sont plus vérifiés. Nous avons de simples contre-exemples :

∘ Pour tracer un cercle, on fixe un point, on y attache une corde, et, corde bien tendue, on tourne autour pour le tracé. Le cercle centré sur le pôle nord et de périmètre l'équateur a un rapport périmètre/diamètre égale à 2, valeur bien inférieure à π.

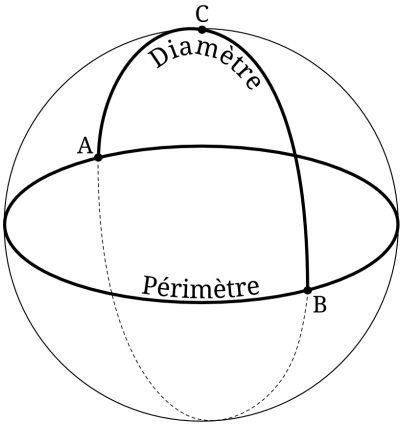
∘ Construisons maintenant un triangle particulier : nous avons un premier point au pôle nord, nous obtenons un deuxième point en rejoignant suivant une droite l'équateur, nous tournons à angle droit vers l'est et nous suivons ensuite l'équateur pendant un quart de tour, nous tournons à angle droit vers le nord, et nous

retournons au pôle nord pour finir le triangle. Nous avons un triangle équilatéral et les trois angles sont droits. La somme des angles de ce triangle vaut 270°, valeur bien supérieure à 180°.

∘ Imaginez-vous habitant à la surface de cette sphère. Vous voulez partir à l'aventure et découvrir des contrées inconnues. Vous n'avez pas conscience de la courbure de votre espace 2D, vous partez en ligne droite, en ne déviant ni vers la droite, ni vers la gauche, et finalement vous finissez par rejoindre votre point de départ depuis le côté opposé ! Voilà qui est bien déconcertant. Les droites de la sphère sont des cercles de même rayon que la sphère (les plus grands cercles que l'on puisse tracer). Par exemple, la ligne de l'équateur, un méridien, sont des droites pour la sphère. Vous ne pouvez pas tracer de droites parallèles, car elles se coupent. Une latitude forme un cercle de rayon inférieur à celui de la sphère, ce n'est pas une droite : un avion, pour rejoindre deux villes à la même latitude, ne suit pas une latitude car ce n'est pas le chemin le plus court.

Nous voyons bien, sur ces trois exemples, que l'espace à la surface d'une sphère n'est pas euclidien. Ce n'est pas un espace plat mais un espace courbe.

La géométrie de la sphère

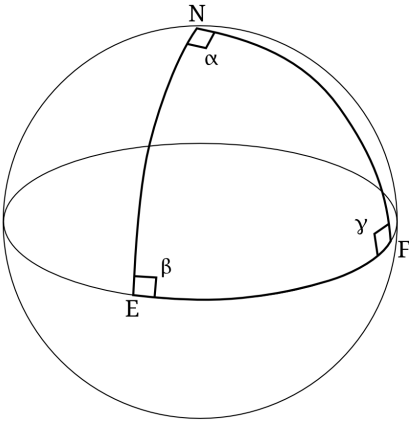


Cercle de centre C :

Périmètre P.

Diamètre D=$\overset{\frown}{AB}$.

P / D = 2 < π

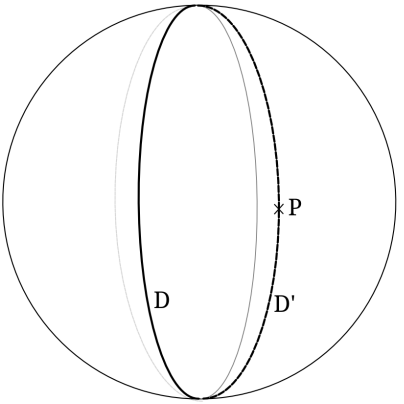


Triangle NEF :

Somme des angles :

$\alpha+\beta+\gamma=270°$

> 180°



Droite D :

Toutes les droites D' passant par P coupent D.

Il n'existe pas de droites parallèles

Les postulats d'Euclide ne sont pas vérifiés.

La courbure se voit aussi sur la métrique qu'utiliseraient les bidiz, nous la donnons pour information[11] :

$$d\,l^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{4\,R^2}\right)^2}$$

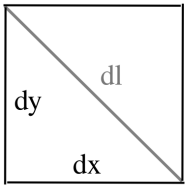
x et *y* sont les deux coordonnées cartésiennes internes à leur espace à deux dimensions. Même s'ils ne "voient" pas la troisième dimension, ils pourraient la déduire conceptuellement. C'est une analogie utile pour les petits êtres humains tridimensionnels que nous sommes. Peut-être, nous-même, vivons-nous à la "surface" d'une hypersphère à quatre dimensions spatiales, tout comme les bidiz vivent à la surface d'un hypercercle (une sphère pour nous !).

Voilà une belle manière de résoudre le problème du bord de l'Univers : si l'Univers n'est pas infini, il devrait y avoir un mur pour définir sa limite, mais qu'y a-t-il derrière le mur ? Si nous vivons sur le volume d'une hypersphère, nous avons un Univers de volume fini, sans bord et sans centre.
Une vision élégante permise avec un espace courbe.

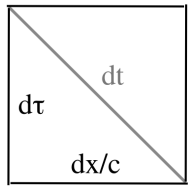
Un Univers fini sans bord et sans centre.

11 *Geometry, Relativity and the Fourth Dimension*, Ruldolf v. B. Rucker, 1977.

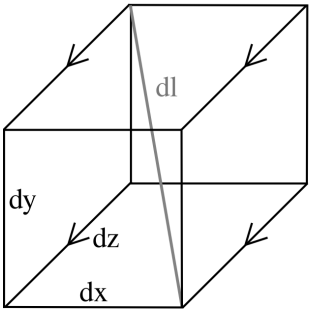
Géométries d'Euclide et de Minkowski



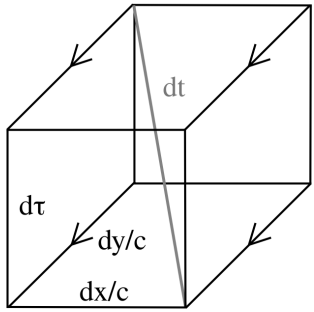
$dl^2=dx^2+dy^2$



$d\tau^2=dt^2-dx^2/c^2$

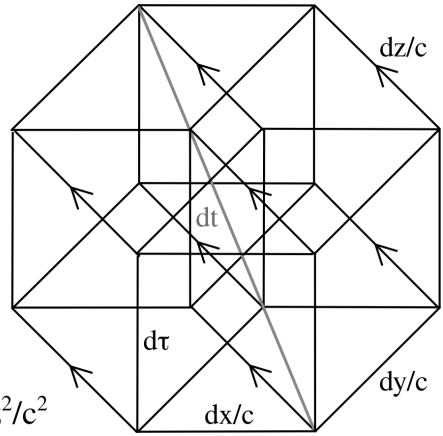


$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$



$d\tau^2=dt^2-dx^2/c^2-dy^2/c^2$

Hypercube
spatio-temporel



$d\tau^2=dt^2-dx^2/c^2-dy^2/c^2-dz^2/c^2$

∞ Métrique de Minkowski

Le temps est maintenant une coordonnée intégrée aux trois autres d'espaces. C'est la métrique de la relativité restreinte. Nous avons montré page 65 que le nouvel invariant s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Nous discernons une partie temporelle et une partie spatiale, dt et $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, d'où $T = \int dt$ et $L = \int dl$. Mais ces deux quantités T et L ne sont pas invariantes.

Les lignes droites, encore appelées géodésiques, maximisent le temps propre τ, grandeur invariante :

$$\tau = \int \sqrt{dt^2 - dl^2/c^2} \qquad (particule \ : \ ds^2 > 0)$$

La métrique de Minkowski est invariante par translation, rotation et transformée de Lorentz.

∞ Métrique du référentiel accéléré

Nous donnons la métrique du référentiel en translation rectiligne uniformément accéléré étudié au chapitre précédent. Ce référentiel n'est pas d'inertie et la métrique est donc nécessairement différente :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{g x}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Nous reconnaissons une partie spatiale de type

euclidien, l'espace est donc plat dans le vaisseau. Concernant la structure de l'espace-temps dans son ensemble, on démontre que cette métrique correspond à un espace-temps, lui aussi, plat. Pour cela on montre que les composantes du tenseur de courbure de Riemann sont toutes nulles. Ceci est bien cohérent avec ce que l'on dit sur la relativité générale : en absence de masse l'espace-temps n'est pas courbé[12].

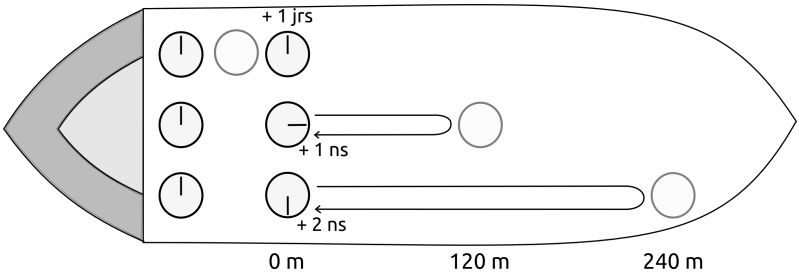
Pour un objet immobile dans le référentiel de la fusée :

$$d\tau = \left(1 + \frac{g\,x}{c^2}\right) dt$$

Nous constatons, pour des observateurs immobiles l'un par rapport à l'autre dans le référentiel accéléré, que le temps ne s'écoule pas au même rythme suivant où on se place dans le vaisseau. C'est un phénomène de dilatation du temps très différent de celui que l'on observe entre deux référentiels d'inertie où les horloges sont en mouvement l'une par rapport à l'autre. Ici, les horloges sont au repos dans le solide de référence (la fusée), elles sont immobiles l'une par rapport à l'autre, et pourtant, elles ne fonctionnent pas au même rythme et ne peuvent être synchronisées. Considérons dans notre fusée trois horloges que nous allons placer à trois niveaux différents espacés de 120 mètres. Nous commençons par les synchroniser au premier niveau à l'arrière du vaisseau. Nous laissons une horloge à

12 C'est plus subtil que cela. Par exemple, les ondes gravitationnelles propagent une courbure d'espace-temps qui perdure même en l'absence de masse.

l'arrière, nous plaçons la deuxième 120 mètres vers l'avant et la troisième à 240 mètres au niveau de la proue (nous les déplaçons lentement pour ne pas ajouter une autre source de dilatation temporelle) :



Après une journée nous les redescendons au premier niveau pour comparer les temps écoulés. Premier constat, elles ne sont plus à la même heure, ensuite l'horloge au deuxième niveau a tourné plus vite et est en avance d'une nanoseconde, la troisième horloge a tourné encore plus vite et est en avance de deux nanosecondes

L'avance, des horloges placées "plus haut" dans le vaisseau, est calculée à l'aide de l'expression suivante qui découle directement de la métrique :

$$\Delta\tau = \frac{gH}{c^2}\Delta t$$

avec $\Delta t = 1\ jours$, $H = 120\,m$ et $g = 10\,m/s^2$.

Nous allons maintenant nous envoyer des photons d'un étage à l'autre. Le résultat va être amusant, et, en plus, nous retrouverons la métrique, de manière simple et intuitive, sans utiliser d'arsenal mathématique. Vous êtes au deuxième niveau et vous

envoyez un photon vers le bas. Le temps que le photon se déplace jusqu'en bas, le vaisseau a pris de la vitesse. Vitesse mesurée dans le référentiel d'inertie qui coïncide avec le référentiel accéléré de la fusée au moment de l'émission du photon. Mettez-vous à la place de celui qui reçoit le photon à l'étage du dessous ; il est maintenant a une vitesse *v* par rapport à l'émetteur au moment où le photon a été émis. Nous avons donc un effet Doppler et comme on se rapproche de la source, le photon "bleuit". Le photon passe très rapidement d'un étage à l'autre et la vitesse de la fusée acquise sur ce laps de temps est très faible ; nous n'utiliserons donc que des formules classiques.

Vitesse acquise par la fusée : $v = g\,t$

et $t = \frac{x}{c}$ pour le photon, d'où $v = \frac{g\,x}{c}$.

Fréquence reçue : $f_R = (1+\beta)\,f_E = \left(1+\frac{g\,x}{c^2}\right) f_E$

Nous retrouvons le bleuissement prévu. Bien sûr, si le photon est maintenant envoyé vers l'avant, sa fréquence diminue, et il rougit :

$f_R = \left(1-\frac{g\,x}{c^2}\right) f_E$ et $T_R = \left(1+\frac{g\,x}{c^2}\right) T_E$ (petites variations).

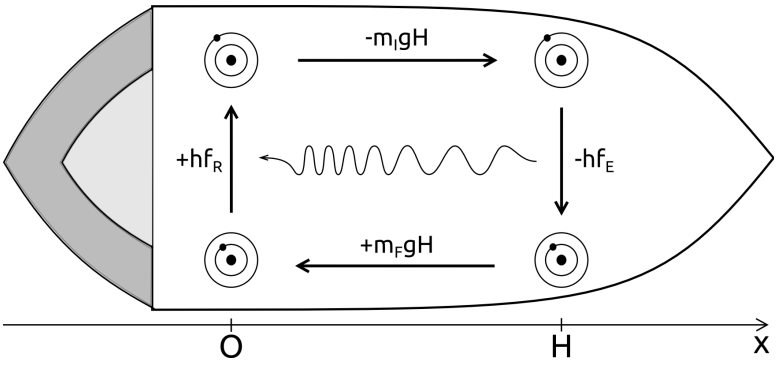
Ce résultat est directement lié à la métrique, car les horloges sont immobiles l'une par rapport à l'autre dans le référentiel de la fusée, et chaque oscillation de l'onde lumineuse peut être considérée comme un mini-flash émis par les horloges. Par exemple, pour une longueur d'onde d'émission de 600 nm, l'horloge source émet 500 000 000 000 000 mini-flashs

toutes les secondes, et une horloge placée 120 mètres vers l'avant reçoit 7 mini-flashs de moins pendant une de ses secondes propre (par effet Doppler le signal rougit en montant et la fréquence diminue). L'observateur placé plus haut en déduit donc que le temps s'écoule plus lentement à l'étage du dessous et plus vite à l'étage du dessus.

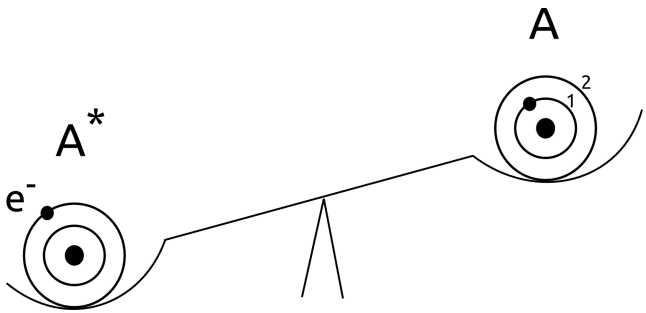
Et ce n'est pas tout, nous pouvons encore élargir notre compréhension par une approche énergétique. En physique nous avons la conservation de l'énergie, et cette loi fondamentale s'applique à la relativité restreinte en incluant l'énergie de masse donnée par la fameuse formule $E=mc^2$.
Nous allons faire passer un atome d'un étage à l'autre. À l'étage inférieur l'atome est excité, nous le montons dans cet état à l'étage supérieur. Élever une masse demande de l'énergie à l'opérateur. Dans un champ d'accélération uniforme l'énergie reçue par un objet de masse *m* vaut mgH. L'énergie de l'atome augmente de $m_I gH$, où m_I est la masse initiale de l'atome excité.
Ensuite, l'atome se désexcite et émet un photon d'énergie $e_E=hf_E$. Nous redescendons alors l'atome, l'opérateur reçoit donc une énergie $m_F gH$, où m_F est la masse finale de l'atome désexcité. Et finalement le photon d'énergie $e_R=hf_R$ est réabsorbé par l'atome. Le bilan de ce petit jeu doit être nul car l'énergie ne doit pas varier :

$$-m_I gH-hf_E+m_F gH+hf_R=0$$

d'où $f_R - f_E = (m_I - m_F)\frac{gH}{h} = \frac{\Delta E}{c^2}\frac{gH}{h}$



Balance à atomes :



Un atome excité A est plus lourd qu'un atome désexcité. La différence de masse donne l'énergie du photon émis :*

$A^* \rightarrow A + \gamma \quad \Delta m\, c^2 = (m^* - m)c^2 = E_\gamma \quad E_\gamma = \Delta E = E_2 - E_1 = hf$

Par émission spontanée, l'électron, lié au noyau atomique, passe du niveau supérieur E_2 au niveau fondamental E_1 en émettant un photon d'énergie égale à la différence d'énergie des niveaux électroniques. Plus des particules sont liées, plus l'énergie de liaison est importante, et, plus la masse de l'édifice est faible.

La variation de masse de l'atome est due à l'émission du photon, ainsi $\Delta E = h f_E$ et $f_R = f_E \left(1 + \frac{g H}{c^2}\right)$

Le photon reçu a une énergie différente du photon émis et nous retrouvons bien la même expression que précédemment. Le photon gagne de l'énergie en descendant, il bleuit, et en perd en montant, il rougit. La conservation de l'énergie permet de retrouver l'effet Doppler, la dilatation du temps en fonction de la position et la métrique du référentiel uniformément accéléré.

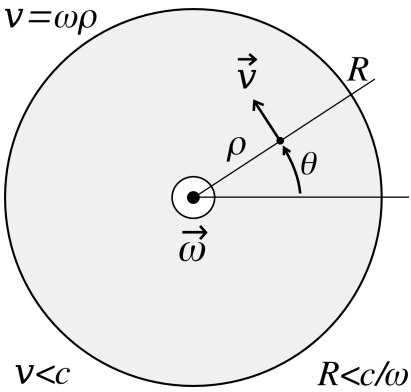
Nous étudierons le lien entre la métrique du référentiel uniformément accéléré et celle de Schwarzschild, utilisée pour les objets massifs à symétrie sphérique (planètes, étoiles, trous noirs, etc), dans les pages suivantes.

∞ Métrique du référentiel en rotation

Nous allons maintenant aborder un autre cas d'école qui se traite aussi avec la relativité restreinte. Un cas dont l'étude ouvre les portes d'applications pratiques, comme le gyromètre laser[13] qui permet de s'orienter bien plus précisément qu'avec un gyromètre mécanique ou une boussole magnétique. Le gyrolaser est utilisé dans les navires, les sous-marins, les avions et les satellites depuis 1963.
Nous avons un disque de rayon R en rotation

13 Utilisation de l'effet Sagnac conceptualisé en 1913.

uniforme autour d'un axe fixe. Le disque est un solide rigide[14] dont la vitesse augmente linéairement avec la distance à l'axe.



La vitesse est mesurée dans un référentiel d'inertie *R* où l'axe est fixe. Nous nous plaçons maintenant dans le référentiel non inertiel *R'* du disque. Prenons un cercle concentrique à l'axe de rotation, nous mesurons le rayon ρ avec un bâton de longueur unité. Ensuite nous entreprenons de mesurer la circonférence en reportant le bâton autant de fois que nécessaire. À chaque report nous utilisons le référentiel d'inertie coïncidant à l'emplacement et instant donné. Il n'y a pas de contraction des longueurs radialement, car la vitesse est perpendiculaire à la longueur mesurée, par contre dans la direction orthoradiale nous sommes colinéaire à la vitesse et la longueur est contractée.

En divisant le périmètre du cercle par son diamètre,

14 Le critère de rigidité est vérifié pour le disque en rotation uniforme et la fusée uniformément accélérée : *L'espace-temps de Minkowski*, Nathalie Deruelle.

la valeur est supérieure à π, l'espace est courbe[15].

Déterminons la métrique en effectuant le changement de coordonnées suivant[16]:

$$\begin{cases} t' = t \\ \rho' = \rho \\ \theta' = \theta - \omega t \\ z' = z \end{cases}$$

La métrique dans le référentiel inertiel *R* s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Cette expression standard donnée en coordonnées cartésiennes s'écrit aussi en coordonnées cylindriques, système de coordonnées qui facilite les calculs pour ce problème qui possède un axe de symétrie :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2 - dz^2$$

L'intervalle devient dans *R'*, en enlevant la coordonnée *z* pour simplifier :

$$ds'^2 = ds^2 = c^2 dt'^2 - d\rho'^2 - \rho'^2 (d\theta' + \omega dt')^2$$

d'où, en enlevant les quantités primées pour alléger :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\rho^2 \omega^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 - 2\ \rho^2 \omega\ dt\ d\theta - d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2$$

En calculant les composantes du tenseur de

15 C'est un nouveau pseudo-paradoxe de la relativité restreinte, présenté en 1909 par Ehrenfest comme une contradiction interne de la théorie. Si l'on accepte que l'espace pour un observateur du disque est non-euclidien la contradiction disparaît.

16 Articles détaillés : *Space geometry of rotating platforms: an operational approach*, et, *The relativistic Sagnac effect: two derivations,* Guido Rizzi et Matteo Luca Ruggiero (2008).

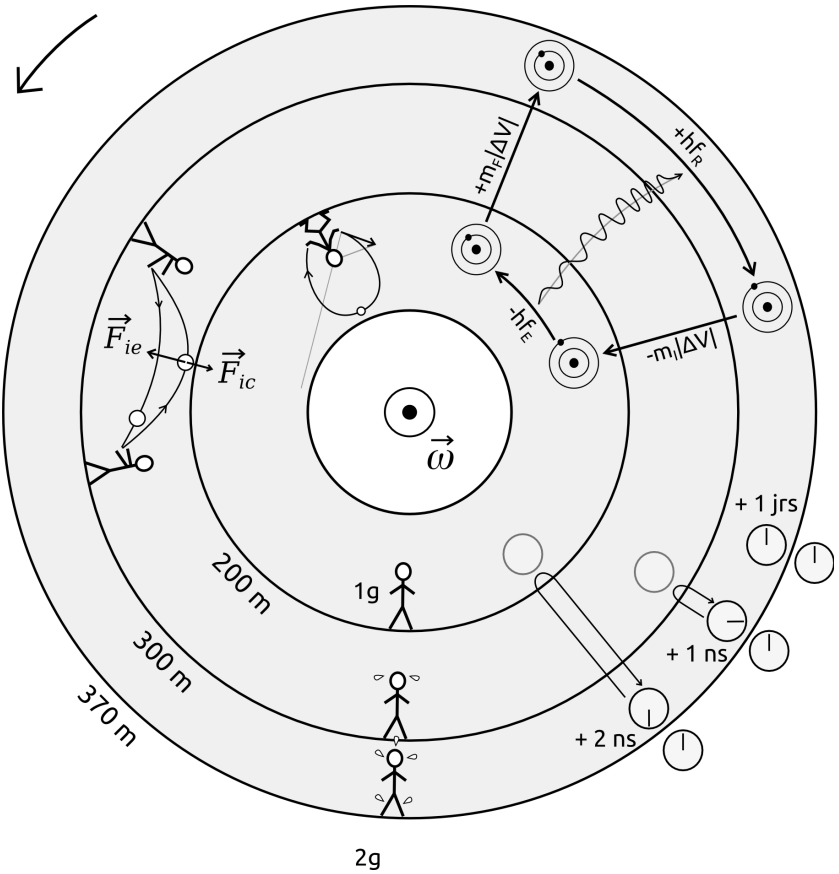
courbure de Riemann (fait au chapitre suivant) nous constatons que toutes les composantes sont nulles. L'espace-temps du disque en rotation uniforme est donc plat[17]. Nous sommes bien dans le cadre de la relativité restreinte, il n'y a pas de courbure d'espace-temps, pas de masse présente[18], et l'espace-temps est bien plat. La relativité restreinte s'applique en espace-temps plat : un changement de coordonnées permet de retrouver la métrique standard de Minkowski. En relativité générale, en présence de gravitation, ce n'est possible que localement autour d'un événement : les ordres zéro et un peuvent toujours coïncider avec un référentiel inertiel (espace-temps minkowskien), par contre, ce n'est plus possible pour l'ordre deux, c'est là que la courbure spatio-temporelle s'exprime.

Nous pouvons créer une pesanteur artificielle avec une nacelle circulaire en rotation. L'avantage, par rapport à la fusée continuellement accélérée par la poussée de ses réacteurs, est une énergie nulle à dépenser. Une fois la nacelle en rotation, par conservation de l'énergie, celle-ci garde son moment cinétique, et la pesanteur se maintient indéfiniment pour les occupants. Par contre, la pesanteur créée n'est pas uniforme, et, en plus de la force centrifuge qui simule la pesanteur, il y a la

17 Vous aurez noté la subtilité ici rencontrée : l'espace est courbe et l'espace-temps est plat.

18 Comme pour la fusée uniformément accélérée, il n'y a pas de masse présente qui crée un champ de gravitation et courbe l'espace-temps. La masse de la fusée, ou du disque, est ici totalement négligeable et n'influence pas la métrique. On parle de masse test.

force de Coriolis qui complique les déplacements des spationautes.



Pour minimiser ces deux inconvénients le rayon de la nacelle doit être suffisamment grand. L'accélération d'entraînement donne : $g=\omega^2\rho$, d'où $\Delta g/g=\Delta\rho/\rho$. Pour une variation de pesanteur inférieure à 1% entre les pieds et la tête, il faut un rayon d'environ 200 mètres. Et la vitesse angulaire de rotation correspondante est de deux tours par minute :

$$\omega = 2\pi f \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\rho}}\,.$$

L'accélération de Coriolis s'écrit $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$. Quand les spationautes courent pour faire le tour de la roue, ils ont l'impression d'être plus lourds en courant dans le même sens que la nacelle et plus légers en sens contraire, ce n'est pas très gênant. Par contre, s'ils font des flexions de haut en bas, ils pourront être poussés latéralement par la force de Coriolis, ça peut agacer[19]. Calculons : $a_c/g = 2v_r/\omega\rho = 2v_r/\sqrt{g\rho}$, pour une vitesse de 20 km/h, $a_c/g \simeq 24\%$. Ce n'est pas négligeable, mais nous pouvons considérer que c'est raisonnable.

Intéressons-nous maintenant à l'écoulement du temps. Pour un observateur immobile :

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\rho^2\omega^2}{c^2}}\,dt \simeq \left(1 - \frac{\rho^2\omega^2}{2c^2}\right)dt$$

Pour des observateurs immobiles l'un par rapport à l'autre, le temps ne s'écoule pas au même rythme. Un ensemble d'horloges au repos en différents points du disque ne peuvent être synchronisées. Plus on s'éloigne de l'axe plus les horloges vont lentement.
Nous plaçons, selon le même protocole que pour la fusée, une première horloge en ρ=370 m, une seconde en ρ=300 m, et une troisième en ρ=200 m.

Nous trouvons : $\Delta\tau = \dfrac{(\rho_2^2 - \rho_1^2)\,\omega^2}{2c^2}\,\Delta t$.

19 Vidéo amusante : *www.voyagepourproxima.fr/ManegeTournant.mp4*

Après une journée nous redescendons les horloges à un rayon de 370 mètres : celle qui était située à 300 mètres avance d'une nanoseconde et celle à 200 mètres de deux nanosecondes. Ici, les avances ne varient pas linéairement avec la distance. La pesanteur vaut 1,5 g à 300 m et 1,85 g à 370 m, un bon exercice pour se muscler et rester jeune !

Nous allons reprendre notre atome excité. Nous décomptons le travail reçu par l'atome à chaque étape. Nous le montons de ρ_1=300 m à ρ_2=200 m. Celui-ci gagne alors une énergie potentielle de pesanteur :

$$w_I = -\Delta e_{p\,I} = \int m_I\, g(\rho)\, d\rho = m_I \omega^2 \int \rho\, d\rho = \frac{1}{2} m_I \omega^2 (\rho_2^2 - \rho_1^2)$$

Il émet le photon : $w_E = -e_E = -h f_E$

Il remonte : $w_F = -\Delta e_{p\,F} = \frac{1}{2} m_F \omega^2 (\rho_1^2 - \rho_2^2)$

Il reçoit le photon : $w_R = e_R = h f_R$

Nous réalisons le bilan d'énergie :

$$\frac{1}{2} m_I \omega^2 (\rho_2^2 - \rho_1^2) - h f_E - \frac{1}{2} m_F \omega^2 (\rho_2^2 - \rho_1^2) + h f_R = 0$$

et on obtient : $f_R = f_E \left(1 + \frac{\omega^2 (\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2 c^2} \right)$

Le photon bleuit en s'éloignant de l'axe de rotation. Nous avons toujours le même phénomène, le photon rougit en montant et bleuit en descendant.

Métrique de Schwarzschild

Pour comparaison, nous donnons la métrique de l'espace-temps autour d'un objet massif à symétrie sphérique. C'est la métrique de Schwarzschild de la relativité générale qui remplace la force de gravitation de Newton pour calculer les orbites des astres. Par exemple, on peut l'utiliser pour l'étude du mouvement de la station spatiale dans le champ de gravitation généré par la Terre. Afin de respecter la symétrie centrale, la métrique est donnée en coordonnées sphériques :

$$d s^2=\left(1-\frac{2 G M}{r c^2}\right) c^2 dt^2-\frac{d r^2}{\left(1-\frac{2 G M}{r c^2}\right)}-r^2 d\theta^2-r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

M est la masse de l'astre central (planète, étoile ou trou noir). Cette masse crée un champ de gravitation et l'espace-temps est courbe. Il n'existe pas de changement de coordonnées global qui rende cette métrique minkowskienne. La gravitation et la courbure d'espace-temps sont absentes dans la relativité restreinte.

Apparaît dans la métrique une quantité homogène à un rayon, cette distance caractéristique du système est appelée le rayon de Schwarzschild :

$$\text{nous posons} \quad r_S=\frac{2 G M}{c^2} .$$

Comme pour le référentiel accéléré en relativité restreinte, nous avons un horizon des événements, ici situé en r_S.

Pour un objet immobile nous obtenons la partie temporelle :

$$d\tau = \sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}dt$$

Plus nous nous éloignons de l'objet massif plus la courbure est faible. À grande distance l'espace peur être approximé comme plat, et, en vertu du principe d'équivalence de la relativité générale, nous devons retrouver la forme de la métrique de la fusée uniformément accélérée :

$$d\tau \simeq \left(1-\frac{GM}{rc^2}\right)dt \quad \text{pour} \quad r \gg r_S \,.$$

Par exemple, pour la Terre, le rayon r_S vaut environ 9 millimètres. Au niveau du sol, situé à quelque 6370 km, l'approximation est extrêmement bonne [20].

En posant $r = r_0 + x$ avec $r_0 \gg r_S$:

$$d\tau_{r_0} = \left(1-\frac{GM}{r_0 c^2}\right)dt \quad \text{et} \quad d\tau_{r_0+x} = \left(1-\frac{GM}{r_0 c^2}\left(1-\frac{x}{r_0}\right)\right)dt$$

$$\text{donne} \quad d\tau_{r_0+x} = \left(1+\frac{GMx}{r_0^2 c^2}\right)d\tau_{r_0}$$

La forme est bien la même que pour la fusée uniformément accélérée :

$$d\tau = \left(1+\frac{gx}{c^2}\right)dt.$$

20 Aussi, nous pouvons oublier la rotation propre de la Terre, car la vitesse du sol est très faible devant la vitesse de satellisation (référentiel géocentrique).

Nous retrouvons le principe d'équivalence quand :

$$g=\frac{G\,M}{r_0^2}.$$

Nous avons là aussi les horloges plus hautes plus rapides et les photons montants qui rougissent. Au niveau du sol terrestre sur une hauteur de 100 mètres, la différence de temps atteint 0,9 ns en 24 h[21]. Résultat proche de celui obtenu dans la fusée[22]. Localement, rien ne permet aux astronautes de différencier le champ de pesanteur artificiel créé par l'accélération de la fusée, d'une pesanteur naturelle générée par une masse. Par contre, sur un domaine spatial suffisamment étendu, ils pourraient différencier les deux situations : l'espace de la fusée uniformément accélérée est euclidien alors que celui de l'astre massif ne l'est pas[23].

---

21 Dans le cas de la station spatiale, même si la poutre de 110 mètres peut être maintenue dirigée vers la Terre par verrouillage gravitationnel, les horloges restent synchronisées. Au niveau de la station le champ de pesanteur vaut encore 90 % de celui au sol, mais il n'y a pas de redshift, car durant la rotation autour de la Terre, le côté extérieur va légèrement plus vite que celui intérieur et l'effet est parfaitement compensé. C'est le principe d'équivalence, pour les spationautes tout se passe comme si il n'y avait pas de gravitation (ils sont en apesanteur) car ils sont en chute libre.

22 Deux les deux cas nous avons des horloges au repos l'une par rapport à l'autre qui se désynchronisent. Pour la fusée, en changeant de référentiel, on peut considérer qu'il s'agit d'un effet Doppler. Ce n'est pas possible pour la gravitation et l'on parle alors de décalage vers le rouge ou le bleu (on utilise souvent les termes anglais *redshift* et *blueshift*).

23 Aussi dans la fusée l'accélération propre est inversement proportionnelle à la distance d'horizon, alors que pour le corps massif elle varie au carré de la distance au centre de l'astre. Le principe d'équivalence n'est vrai que très localement.

Exercices

1. ▲△△ Métrique euclidienne

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Montrez que la métrique d'Euclide est invariante par translation, rotation et par une transformée de Galilée.

Correction p381.

2. ▲△△ Rapidité

1 - Montrez que la transformée spéciale de Lorentz peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} ct' = ct\,ch\varphi + x\,sh\varphi \\ x' = ct\,sh\varphi + x\,ch\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Nous avons utilisé de la trigonométrie hyperbolique et φ est la *rapidité*.

2 - Montrez que, pour deux transformées de Lorentz successives, selon la même direction, les rapidités sont additives.

Corr. p382

3. ▲△△ Métrique de Rindler[24]

$$ds^2 = r^2 d\tau^2 - dr^2 - dy^2 - dz^2$$

1 - Quelles sont les invariances du système de

24 W. Rindler, *Relativity*, Oxford Univ. Press, 2d Ed, 2006, 430 pages.

coordonnées de Rindler par rotation et transformée de Lorentz ?

2 - Montrez que ce système de coordonnées correspond à celui d'un référentiel uniformément accéléré.

3 - Montrez que le changement de coordonnées qui suit permet de retrouver une métrique minkowskienne :

$$\begin{cases} ct = r\,sh\,\tau \\ x = r\,ch\,\tau \end{cases}$$

En déduire le changement de coordonnées entre le référentiel *(x,t)* de la fusée uniformément accélérée et le référentiel galactique *(x',t')*.
Tracez sur un diagramme de Minkowski, dans le référentiel inertiel *R'*, le réseau des lignes coordonnées pour *x* et *t*.

Corr. p382

4.$\overset{01}{10}$ ▲▲△ Chute d'un objet dans la fusée

Dans notre fusée uniformément accélérée, pour passer le temps au cours de ce voyage de quelques années, nous nous amusons à nous lancer des objets. Que vous lâchiez une balle sans vitesse initiale, ou, que vous la lanciez à votre camarade, nous appelons *chute libre* ce mouvement de l'objet, car il n'est soumis à aucune force. Nous avons expliqué que l'accélération de la fusée générait une pesanteur artificielle. C'est localement équivalent à un champ de pesanteur uniforme, mais, au vu de la métrique du référentiel accéléré, nous pressentons

que la trajectoire d'un objet en chute libre sera modifiée. Nous allons aborder la question en deux phases : une première approche qualitative puis un calcul complet.

1 - Nous prenons deux horloges initialement synchronisées et immobiles au même endroit. Comme dans le cours, l'une va rester à la même place, et la seconde va être bougée puis ramenée au point de départ. Vous jouez au jeu suivant : Au départ les deux horloges indiquent zéro. Vous disposez de l'horloge mobile que vous pouvez déplacer à votre guise. Seule contrainte, à une minute pile indiquée sur l'horloge fixe, votre horloge devra être de retour, posée bien sagement à côté d'elle. Le défi est d'obtenir le temps le plus grand possible sur votre horloge. Comment devez-vous la déplacer pour gagner ?

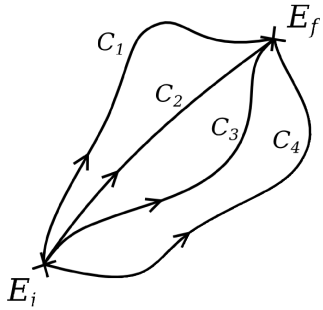
Variante du jeu : Précédemment le point de départ était le point d'arrivée. Si maintenant, le point d'arrivée, tout en restant au même niveau, est différent, comment devons-nous procéder pour maximiser le temps de notre horloge ?

2 - Le chemin suivi par une particule libre pour aller de l'événement initial E_i à l'événement final E_f maximise son temps propre :

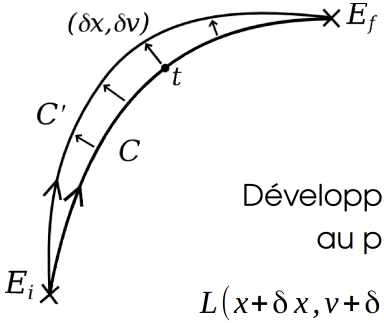
$$\tau=\int_{E_i}^{E_f} d\tau=\int_C \sqrt{g(x)-\frac{v^2}{c^2}}\,dt \quad \text{avec} \quad g(x)=\left(1+\frac{a\,x}{c^2}\right)^2$$

Nous posons : $L(x,v)=\sqrt{g(x)-\frac{v^2}{c^2}}$ (Lagrangien).

Une infinité de chemins C possibles relient E_i à E_f.
Lequel extrémise τ ?



Nous savons que pour le chemin extrémal, une petite variation des paramètres x et v ne modifie pas, à l'ordre un, le temps propre.
C'est une propriété mathématique simple : aux maxima et minima d'une fonction la pente est nulle.
Supposons que C soit le chemin optimal et considérons C' infiniment voisin. À t donné, nous passons de C à C' par de petites variations de x et v :



$$x_{C'} = x_C + \delta x$$
et
$$v_{C'} = v_C + \delta v$$

Développons le Lagrangien au premier ordre :

$$L(x+\delta x, v+\delta v) = L(x,v) + \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial v}\delta v$$

Ainsi : $\int_{C'} L(x+\delta x, v+\delta v)\,dt$

$$= \int L(x,v)\,dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial v}\delta v \right) dt = \tau + \delta\tau$$

Pour le chemin recherché $\delta\tau = 0$.

a- Poursuivre le raisonnement et établir l'équation du mouvement d'un objet en chute libre. Montrez que cette équation, au départ du lancer et pour des vitesses faibles, redonne celle de la chute

libre en mécanique newtonienne.
Finalement, comment allez-vous déplacer votre horloge pour gagner ?

b- Démontrez la loi de conservation suivante :

$$L-\frac{\partial L}{\partial v}v=cste$$

Nous considérons le cas d'un lâcher sans vitesse initiale. Trouver l'expression de la position, la vitesse et l'accélération en fonction de $g(x)$. Comment varie g au cours de la chute ?
Montrez que la vitesse de chute passe par un maximum pour ensuite s'annuler sur l'horizon. Que vaut la vitesse maximale de chute ? À quelle distance de l'horizon ?

c- Réalisez une simulation numérique pour tracer les courbes de position, vitesse et accélération en fonction du temps. Quand la vitesse maximale est atteinte ? Quand l'objet atteint-il l'horizon pour un observateur de la fusée ?

d- *Temps propre* : Donner l'expression du temps propre. Dans son référentiel propre, quand l'objet atteint-il l'horizon ? Supposons que l'objet soit une mini-fusée annexe qui quitte en chute libre le vaisseau mère. Que se passera-t-il pour l'occupant de l'annexe quand il atteindra l'horizon ? Cette petite fusée est très rapide, le pilote décide d'allumer le réacteur pour retourner au vaisseau principal, y parviendra-t-il ? Vous pouvez illustrer la situation sur deux diagrammes de Minkowski (référentiel galactique, puis, de la fusée).

e- *Repère minkowskien local* : Le système de coordonnées de la fusée accélérée n'est pas minkowskien. La vitesse précédemment déterminée dans une métrique non minkowskienne est appelée *vitesse coordonnée*. Ce système de coordonnée a été construit dans un référentiel non inertiel et les postulats de la relativité restreinte ne s'y appliquent pas directement. Ce référentiel est néanmoins très utile et nécessaire pour les occupants de la fusée, mais la vitesse de la lumière n'y est pas fixée à *c*. C'est pourquoi nous allons considérer un nouvel observateur, lui inertiel. À chaque instant et position de l'objet en chute libre, nous considérons le référentiel minkowskien coïncidant avec celui de la fusée :

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt_{Mink}{}^2 - dx^2$$

Par exemple, imaginez deux fusées fixes l'une par rapport à l'autre et uniformément accélérées. Tout d'un coup, l'une coupe son moteur, son référentiel devient inertiel, et pendant quelque temps elle coïncide avec la fusée toujours accélérée. Ainsi un observateur dans la fusée qui a coupé son moteur est minkowskien, et il peut observer la chute de l'objet. Quelle vitesse mesurera-t-il pour l'objet en chute libre ? Quelle sera la vitesse de l'objet en chute libre au niveau de l'horizon pour un observateur minkowskien ?

3 - *Analogie avec la chute dans un trou noir :*

a- Le système de coordonnées de Schwarzschild est celui d'un observateur extérieur au trou noir. Nous

pouvons comparer la chute radiale d'un objet vers un trou noir avec la chute verticale d'un objet observée par l'occupant d'une fusée uniformément accélérée :

$$d\tau^2 = g(r)dt^2 - \frac{dr^2}{c^2 g(r)} \quad \text{avec} \quad g(r) = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$$

$$\tau = \int L(r,v)\,dt \quad \text{et} \quad L(r,v) = \sqrt{g(r) - \frac{1}{g(r)}\frac{v^2}{c^2}}$$

Décrire le profil de vitesse de la chute d'un corps, lâché sans vitesse initiale, jusqu'à l'horizon du trou noir $r_H = r_S = 2GM/c^2$. Vous tracerez les courbes pour la vitesse et l'accélération en fonction de *r*.
Quelle-est la vitesse maximale atteinte ? À quelle distance de l'horizon ?

b- Réalisez une simulation numérique pour tracer les courbes de position, vitesse et accélération en fonction du temps. Quand la vitesse maximale est atteinte ? Quand l'objet atteint-il l'horizon pour un observateur extérieur au trou noir ?

c- *Temps propre* : Donner l'expression du temps propre. Dans son référentiel propre, quand l'objet atteint-il l'horizon ? Supposons que l'objet soit un vaisseau spatial en chute libre. Que se passera-t-il pour l'occupant du vaisseau quand il atteindra l'horizon ? Cette fusée est très rapide et puissante, le pilote décide d'allumer le réacteur pour quitter le trou noir, y parviendra-t-il ?

d- *Repère minkowskien local* : Le système de coordonnées de Schwarzschild n'est pas minkow-

skien. Nous avons précédemment déterminé la vitesse et l'*accélération coordonnée* dans ce repère. Ce système de coordonnées est très pratique et utile mais la vitesse de la lumière n'y est pas fixée à *c*. C'est pourquoi nous allons considérer un nouvel observateur, lui inertiel. À chaque instant et position de l'objet en chute libre, nous considérons le référentiel minkowskien immobile par rapport au trou noir et coïncidant avec celui de Schwarzschild :

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt_{Mink}{}^2 - dr_{Mink}{}^2$$

Quelle vitesse mesure-t-on ainsi pour l'objet en chute libre ? Quelle sera la vitesse de l'objet en chute libre pour un observateur minkowskien au niveau de l'horizon ?

e- *Comparaison aux données expérimentales* :
En 2018, une étude[25] des mesures effectuées par la sonde XMM-Newton, qui a observé un trou noir super-massif de 40 millions de masses solaires, montre un vent de matière en chute libre vers le trou noir qui atteint des vitesses relativistes :

$$v \sim 0{,}3c \quad pour \quad r \sim 20\, R_S$$
$$v \sim 0{,}1c \quad pour \quad r \sim 200\, R_S$$

Ces résultats vous semblent-ils cohérents avec ceux trouvés dans l'exercice ?

Correction p384.

25 *An ultrafast inflow in the luminous Seyfert PG1211+143* , 2018, K.A.Pounds, C.J.Nixon, A.Lobban et A.R.King. Université de Leicester, Royaume-Uni.

5. ▲△△ Chute d'une boule bleue

Nous lâchons une boule bleue dans la fusée uniformément accélérée et nous l'observons tomber en chute libre. Quelle sera la couleur de la boule perçue au cours de sa chute par les astronautes de la fusée ?

Correction p404.

6. ▲▲△ Trajectoire des rayons lumineux dans l'ascenseur d'Einstein

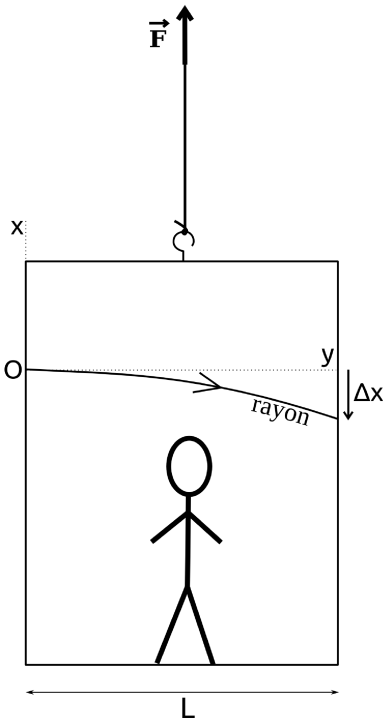
Albert Einstein propose une expérience de pensée dans son livre *La relativité* écrit en 1916. Nous imaginons une portion d'espace vide infiniment éloignée de toutes masses. Nous disposons d'une grande boîte dans laquelle un observateur évolue en apesanteur. Un crochet permet d'exercer à l'aide d'une corde une force constante sur la boîte alors animée d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré. L'observateur expérimente ainsi une pesanteur artificielle.
Par rapport à la boîte immobile, constituant alors un référentiel inertiel, la trajectoire d'un rayon lumineux de vitesse c est rectiligne. Par contre, dans la boîte accélérée par la traction de la corde, un rayon lumineux, ici, initialement perpendiculaire à la direction du mouvement, empruntera une trajectoire courbée. Citons Einstein : "*la trajectoire du même rayon de lumière, comme il est facile de le montrer, n'est plus une ligne droite*".

1 - *Approximation newtonienne :*

Nous considérons la vitesse de la lumière constamment égale à *c*, et la trajectoire rectiligne, dans le référentiel galiléen qui coïncide initialement avec la boîte.

Pour une boîte d'accélération constante *a*, déterminez Δx.

Exprimez l'équation de la trajectoire y(x) et de la vitesse de la lumière v(x) dans le référentiel accéléré.



2 - *Relativité restreinte :*

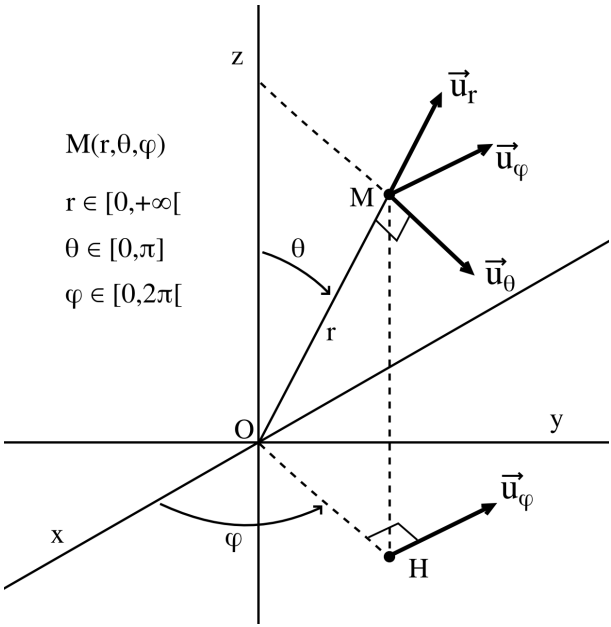
Nous répondons aux mêmes questions que précédemment. Pour cela, nous considérons, dans un premier temps, l'équation de la ligne d'univers du rayon lumineux dans le référentiel inertiel. Ensuite, à l'aide du changement de coordonnée adapté, nous obtenons l'équation de la ligne d'univers dans la boîte non-inertielle.

3 - Tracé des courbes.

Correction p404.

7. ▲▲△ Les coordonnées sphériques

Définition des coordonnées sphériques :



1 - Relations de passage entre les systèmes cartésiens et sphériques.

2 - Expression du rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et de l'élément infinitésimal entre *M* et *M'* infiniment voisin $\vec{dr} = \overrightarrow{MM'}$.

3 - Retrouvez par intégration la surface et le volume d'une sphère.

4 - Définition des angles plans et solides : depuis un point d'observation O, nous observons un objet. Les prolongements du pourtour de l'objet découpe un arc sur le cercle unité de centre O. La longueur de

cet arc donne la valeur de l'angle en radians sous lequel nous voyons l'objet. Dans l'espace 3D le cercle est remplacé par une sphère unité sur laquelle est découpée une surface. L'aire de cette surface donne l'angle solide en stéradians sous lequel nous voyons l'objet.

a- Sous quel angle solide voit-on l'ensemble de l'espace ? Le ciel étoilé par temps dégagé ? Une pièce depuis l'un de ses coins ?

b- Calculez l'angle solide d'un cône d'angle α.

c- Quelle est la probabilité qu'une étoile soit dans le plan de l'écliptique à dix degrés près ?

Correction p407.

$\widetilde{u}$

7

QUADRIVECTEURS

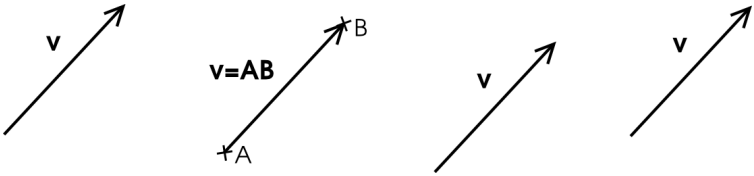
Nous avons introduit la relativité restreinte à travers l'espace-temps de Minkowski : espace des événements muni de sa métrique[26]. Nous pouvons étendre cet espace ponctuel pour construire des éléments plus complexes comme des vecteurs ou des tenseurs.

La présentation qui suit est un peu formelle mais nécessaire pour une pleine compréhension de la relativité. Nous continuerons à nous appuyer sur une vision géométrique dès que possible.

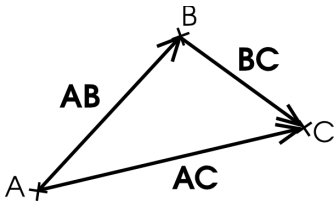
Les éléments d'un espace vectoriel E sont des vecteurs, notés dans ce livre avec des lettres en gras : **v**.
Si nous avons besoin de spécifier que nous sommes dans un espace vectoriel euclidien, nous utiliserons la notation classique avec des flèches : $\vec{v}$.
Dans le cas de l'espace de Minkowski, nous pourrons préciser le contexte en parlant de quadrivecteurs notés avec des tildes : $\widetilde{v}$.

26 Nous avons considéré la métrique de Minkowski standard $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ d'un référentiel d'inertie dans un repère cartésien orthonormé. Tout en gardant un référentiel d'inertie, la forme de la métrique peut être différente. Par exemple, dans les cas où la métrique est exprimée dans un repère non orthonormé ou non cartésien. Nous parlons alors de métrique minkowskienne. Quand le changement de coordonnées donne un référentiel non-inertiel (comme pour notre fusée et le disque en rotation) la relativité restreinte s'applique en ajoutant les effets métriques (page 229).

De manière générale, un vecteur peut-être défini de manière unique à partir de deux points (ou événements) de notre espace (ou espace-temps) :

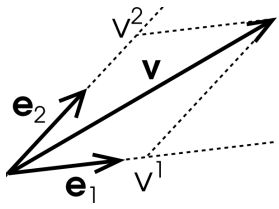


L'espace vectoriel est affine et avec un troisième point nous avons la relation de Chasles :



En multipliant par un réel nous avons un nouveau vecteur k **AB** et le vecteur est orienté **BA** = - **AB**. Toute combinaison linéaire de vecteurs de E est un nouveau vecteur de E.

Nous exprimons un vecteur **v** dans une base. Les vecteurs de la base sont notés $\boldsymbol{e}_i$ et forment une famille libre et génératrice de E. Pour un espace vectoriel de dimension *n* :



$$\boldsymbol{v} = v^1 \boldsymbol{e}_1 + v^2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + v^n \boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} v^i \boldsymbol{e}_i = v^i \boldsymbol{e}_i$$

Nous utilisons la convention d'Einstein, la sommation est sous-entendue pour un indice répété en haut et en bas. Les v^i sont les composantes de **v** selon les vecteurs de la base ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ... , $\mathbf{e}_n$).

Produit scalaire de deux vecteurs **a** et **b** :

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(a^i\boldsymbol{e}_i\right)\cdot\left(b^j\boldsymbol{e}_j\right)=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j a^i b^j$$

Nous définissons les composantes du tenseur métrique **g** telles que : $g_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$.

Ainsi : $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=g_{ij}a^i b^j$.

Par exemple, pour *n=2*, on a :

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=g_{11}a^1b^1+g_{12}a^1b^2+g_{21}a^2b^1+g_{22}a^2b^2$$

Le produit scalaire[27] est commutatif et les composantes du tenseur métrique sont symétriques :

$$g_{ij}=g_{ji}$$

Nous pouvons écrire les composantes du tenseur métrique selon une matrice. Par exemple, pour *n=3* dans la base ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) :

$$\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Nous avons une deuxième façon de projeter un

27 En math, on parle de forme bilinéaire, elle associe à deux vecteurs un nombre, appelé scalaire.

vecteur. Les premières composantes, données précédemment, sont obtenues parallèlement aux vecteurs de base. Nous pouvons obtenir un nouveau jeu de composantes v_i en projetant orthogonalement :

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_i=\left(v^j\boldsymbol{e}_j\right)\cdot\boldsymbol{e}_i=g_{ij}v^j=v_i$$

On a alors une nouvelle base associée à ces nouvelles composantes : $\boldsymbol{e}^i=g^{ij}\boldsymbol{e}_j$. Les g^{ij} sont calculés à partir des g_{ij} avec : $g_{ik}g^{kj}=\delta_i^{\ j}$ où $\delta_i^{\ j}$ est le symbole de Kronecker, nul, si les indices sont différents, et, égal à un, s'ils sont égaux.
Nous avons alors une nouvelle écriture :

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{e}^i$$

Avec les indices en bas, ce sont des grandeurs covariantes. Avec les indices en haut ce sont des grandeurs contravariantes. Par exemple, les composantes v_i sont covariantes et les vecteurs de bases $\boldsymbol{e}^i$ sont contravariants. Les composantes g_{ij} sont doublement covariantes et celle du tenseur g^{ij} doublement contravariantes. Nous verrons au moment des changements de bases la signification précise et l'importance de ce vocabulaire.
Le tenseur métrique permet de basculer entre ces deux types de grandeurs.
Au final, nous pouvons avoir quatre écritures différentes pour le produit scalaire :

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=g_{ij}a^ib^j=a^ib_i=a_ib^i=g^{ij}a_ib_j$$

Vecteurs orthogonaux : $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

Dans le cas d'une base orthogonale :

si $i\neq j$ alors $g_{ij}=0$.

Par exemple, pour $n=2$: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=g_{11}a^1b^1+g_{22}a^2b^2$

et $\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$.

Les vecteurs, les tenseurs et les scalaires sont des objets mathématiques essentiels pour la physique. Les lois de la nature sont exprimées à l'aide d'équations construites à partir de ces trois types d'objets, car si nous changeons de base les lois gardent alors la même forme. La nouvelle base est associée à de nouvelles coordonnées utilisées pour réaliser une translation, une rotation ou un changement de référentiel galiléen ou d'inertie. Nous étudierons plus tard les changements de coordonnées.

Suite à cet intermède quelque peu abstrait, abordons différents cas pratiques.

ESPACE VECTORIEL D'EUCLIDE

Les lois de Newton et l'ensemble de la mécanique classique est construite avec des vecteurs, des scalaires et des tenseurs.

Relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F}=m\vec{a}\ ,$$

Théorème de la puissance cinétique :

$$P_c=\frac{d\,E_c}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=P=\vec{F}\cdot\vec{v}\ ,$$

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(m\vec{r}\wedge\vec{v}\right)=\vec{r}\wedge\vec{F}\ .$$

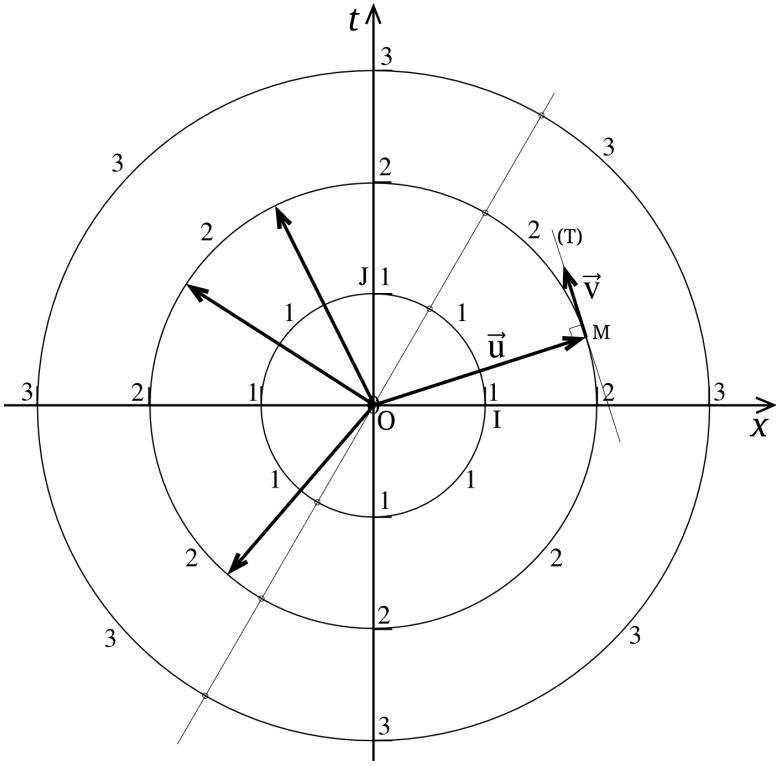
Toutes ces lois gardent la même forme par translation, rotation et transformation de galilée. L'utilisation de vecteurs nous l'assure.

En géométrie euclidienne le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même ne peut être que positif ou nul, on peut alors définir une **norme** :

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

La norme est positive et définie :

- $\vec{v}\cdot\vec{v}\geqslant 0$.
- $\vec{v}\cdot\vec{v}=0$ si et seulement si $\vec{v}=\vec{0}$.



En géométrie euclidienne, la norme d'un vecteur est représentée par sa longueur et cette longueur est indépendante de la base choisie. Au départ de O, toutes les extrémités de vecteurs de même norme se placent sur un même cercle (nous avons représenté quatre vecteurs de norme 2).

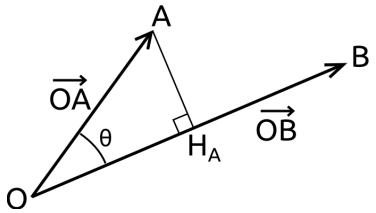
Une propriété du cercle : si nous traçons un rayon OM, la tangente (T) est toujours perpendiculaire à (OM). Nous obtenons ainsi un couple de vecteurs orthogonaux :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0.$$

Pour un ensemble de cercles concentriques de rayons multiples de l'unité, une droite passant par O coupe les cercles en un ensemble de points équidistants.

Détermination géométrique du produit scalaire :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$



$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos\theta$$

$$=\pm OH_A\times OB$$

$$=\pm OH_B\times OA$$

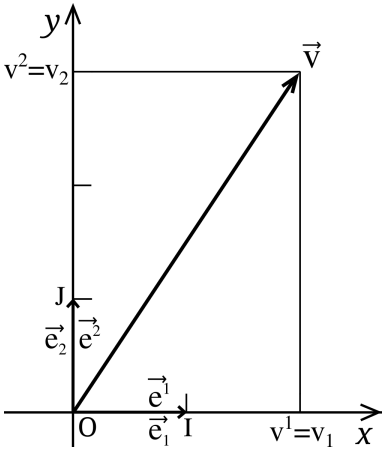
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}\right)\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\vec{c}+\vec{n}\right)\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{n}\cdot\vec{b}$$

Au final, si nous trouvons un vecteur normal $\vec{n}$, le produit scalaire se ramène à celui de deux vecteurs colinéaires et la valeur est le produit de leurs rayons :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{b}=\pm R_c\times R_b$$

Le signe est positif si les deux vecteurs colinéaires sont dans le même sens, et négatif s'ils sont en sens opposés. Nous avons deux options équivalentes, trouver un vecteur normal à $\vec{a}$ ou à $\vec{b}$.

∘ **Bases cartésienne orthonormée :**



Nous pouvons toujours nous ramener à une base cartésienne orthonormée :

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}.$$

Par exemple, pour *n=2*, nous avons dans ce cas :

$$\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a^1b^1+a^2b^2$$

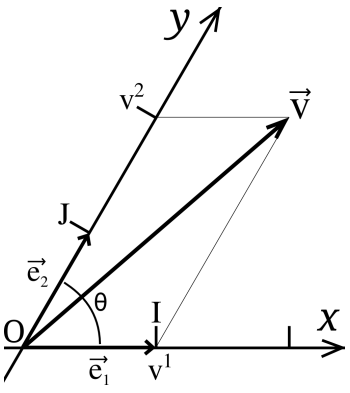
et pour la norme :

$$v=\sqrt{\|\vec{v}\|}=\sqrt{\left(v^x\right)^2+\left(v^y\right)^2}$$

Les composantes covariantes et contravariantes sont alors identiques. De même pour les bases.

- **Bases cartésienne normée et non orthogonale :**

Cas pour un vecteur du plan (2-vecteur) :



Nous connaissons les composantes contra-variantes de $\vec{v}$ dans la base covariante :

$$\vec{v}=v^1\vec{e}_1+v^2\vec{e}_2=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$$

avec $g_{ij}=\begin{pmatrix}1 & \cos\theta\\ \cos\theta & 1\end{pmatrix}$

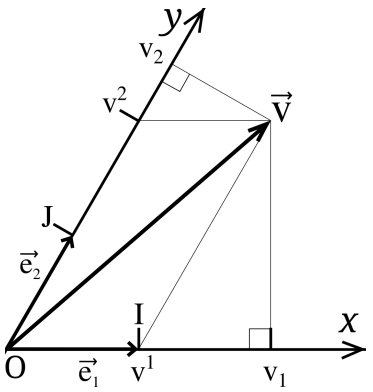
et $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Déterminons les composantes covariantes de $\vec{v}$:

$$v_i=g_{ij}v^j=g_{i1}v^1+g_{i2}v^2$$

$$v_1=g_{11}v^1+g_{12}v^2=v^1+\cos\theta\,v^2=2=\vec{v}\cdot\vec{e}_1$$

$$v_2 = g_{21} v^1 + g_{22} v^2 = \cos\theta\, v^1 + v^2 = \frac{5}{2} = \vec{v}\cdot\vec{e}_2$$



Nous avons maintenant deux décompositions possibles pour $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = 2\vec{e}^1 + \frac{5}{2}\vec{e}^2$$

Déterminons les composantes du tenseur métrique dans la base contravariante :

$$g_{i1} g^{1j} + g_{i2} g^{2j} = \delta_i^{\,j}$$

$$g_{11} g^{11} + g_{12} g^{21} = 1 \quad \text{d'où} \quad g^{11} + \cos\theta\, g^{21} = 1$$

$$g_{11} g^{12} + g_{12} g^{22} = 0 \quad \text{et} \quad g^{12} = -\cos\theta\, g^{22}$$

$$g_{21} g^{12} + g_{22} g^{22} = 1 \quad \text{et} \quad \cos\theta\, g^{12} + g^{22} = 1$$

$$g_{21} g^{11} + g_{22} g^{21} = 0 \quad \text{et} \quad g^{21} = -\cos\theta\, g^{11}$$

d'où : $g^{11} = g^{22} = 1/\sin^2\theta$

et $g^{12} = g^{21} = -\cos\theta/\sin^2\theta$

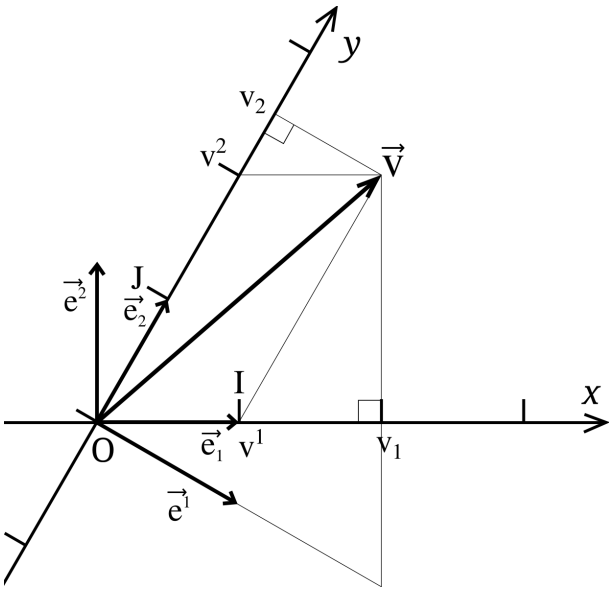
Métrique : $g^{ij} = \dfrac{1}{\sin^2\theta}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\theta \\ -\cos\theta & 1 \end{pmatrix}$

Déterminons la base contravariante :

$$\vec{e}^{\,i} = g^{ij}\vec{e}_j = g^{i1}\vec{e}_1 + g^{i2}\vec{e}_2$$

d'où : $\vec{e}^{\,1} = g^{11}\vec{e}_1 + g^{12}\vec{e}_2 = \dfrac{\vec{e}_1 - \cos\theta\,\vec{e}_2}{\sin^2\theta} = \dfrac{4}{3}\left(\vec{e}_1 - \dfrac{1}{2}\vec{e}_2\right)$

et : $\vec{e}^{\,2} = g^{21}\vec{e}_1 + g^{22}\vec{e}_2 = \dfrac{-\cos\theta\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{\sin^2\theta} = \dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right)$



Maintenant, si vous êtes prof de maths en collège et qu'au moment de l'étude des repères non orthogonaux un élève vous demande *"Pourquoi on projette selon les parallèles aux axes et pas selon les perpendiculaires ?"*, vous saurez quoi répondre. L'élève à tout à fait raison, les deux types de projections sont possibles et même complémentaires.

ESPACE VECTORIEL DE MINKOWSKI

Nous allons établir les nouvelles lois physiques de la relativité restreinte en s'appuyant sur les quadri-vecteurs. Pour les formules, nous nous inspirerons de la mécanique de Newton via la limite des faibles vitesses.

Nous notons les composantes d'un événement E avec des indices de 0 à 3 :

$$\widetilde{x} = x^{\mu}\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$$

$$x^0 = c\,t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad \text{et} \quad x^3 = z$$

$$\widetilde{v} = \widetilde{OE} = x^{\mu}(E) - x^{\mu}(O) \quad {}^{28}$$

Pour le produit scalaire : $\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} = g_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu}$.

Avec la métrique de Minkowski :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous montrerons que cette métrique redonne bien le triangle des temps.

Nous avons : $\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$.

28 On confond régulièrement les vecteurs, ou les tenseurs, avec leurs composantes. En général, cela ne prête pas à confusion.

Pour la partie spatiale, nous reconnaissons un produit scalaire euclidien, nous pouvons alors écrire :

$$\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=a^0b^0-\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Le produit scalaire d'un vecteur $\widetilde{v}$ avec lui-même peut être positif, nul ou négatif : $\widetilde{v}\cdot\widetilde{v}=(v^0)^2-\|\vec{v}\|^2$. Contrairement au cas euclidien, le produit scalaire minkowskien d'un vecteur avec lui-même n'est pas toujours positif. De plus, $\widetilde{v}\cdot\widetilde{v}=0$ n'implique pas $\widetilde{v}=\widetilde{0}$ Il n'existe pas de norme pour un vecteur dans l'espace de Minkowski. La quantité $\widetilde{v}\cdot\widetilde{v}$ est parfois appelée pseudo-norme[29]. Dans l'espace d'Euclide la longueur d'un vecteur, représentée sur un repère orthonormé, correspond à sa norme, et les vecteurs d'une même norme, et partant d'un même point, se répartissent sur le même cercle. Ce n'est plus le cas sur un diagramme de Minkowski : deux vecteurs peuvent avoir la même pseudo-norme et ne pas apparaître avec la même longueur[30]. Les 4-vecteurs de même pseudo-norme se répartissent sur des hyperboles.

---

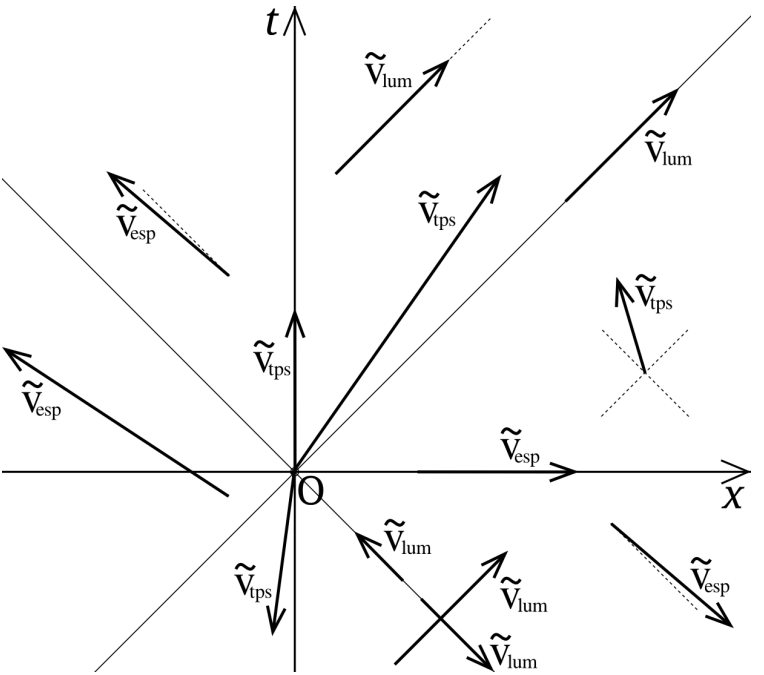
29 Terme utilisé et discutable : ce terme fait référence à la norme euclidienne sans en reprendre tous les principes. Contrairement à la norme, la pseudo-norme n'a pas les mêmes unités que le vecteur (il manque la racine carrée). Nous pourrions considérer la quantité : $k=\sqrt{|\widetilde{v}\cdot\widetilde{v}|}$ où k est le paramètre de l'hyperbole associée au quadrivecteur. Nous pourrions nommer k, la norme de genre temps ou de genre espace selon les cas (comme en euclidien où R est le paramètre du cercle et la norme du vecteur). Nous utiliserons le terme *intensité* pour le k d'un quadrivecteur.

30 Nous représentons l'espace d'Euclide à deux dimensions sur une feuille de papier qui est elle-même un objet physique euclidien 2D. Par contre, le fait d'utiliser une feuille euclidienne pour représenter le plan de Minkowski demande un effort d'abstraction.

Nous avons trois types de 4-vecteurs :

- genre temps : $\tilde{v}\cdot\tilde{v}>0$
- genre lumière : $\tilde{v}\cdot\tilde{v}=0$
- genre espace : $\tilde{v}\cdot\tilde{v}<0$

Les vecteurs de genre lumière sont sur les cônes de lumières associés aux lignes d'univers des photons. Les vecteurs de genre temps sont dans le cône (vers la verticale), et ceux de genre espace vers l'extérieur du cône.



Suivant le signe de la composante temporelle, un quadrivecteur peut pointer vers le futur ou le passé. Cette propriété et celle du genre ne dépendent pas

du référentiel d'inertie considéré.
Quand le produit scalaire de deux vecteurs est nul on a des vecteurs orthogonaux :

$$\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=0$$

Cette propriété d'orthogonalité est, elle aussi, valable dans tous les référentiels d'inertie.

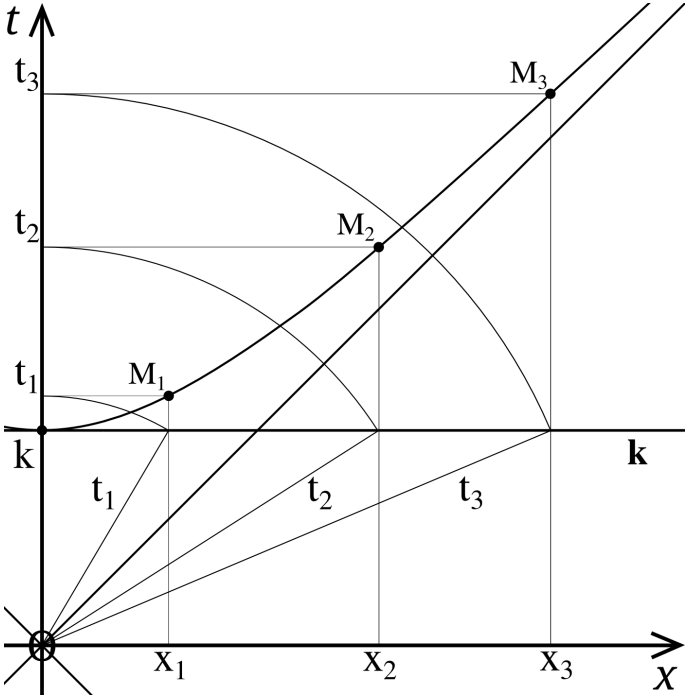
À nouveau, la situation n'est pas aussi intuitive qu'en euclidien, ce n'est pas parce que deux vecteurs sont orthogonaux qu'ils apparaissent perpendiculaires sur un diagramme.

Nous avons deux types d'hyperboles, celles de genre temps, internes au cône de lumière, d'équations $t^2-x^2=k^2$ (pour simplifier on a posé c=1), et celles externes, de genre espace, d'équations $t^2-x^2=-k^2$ [31].

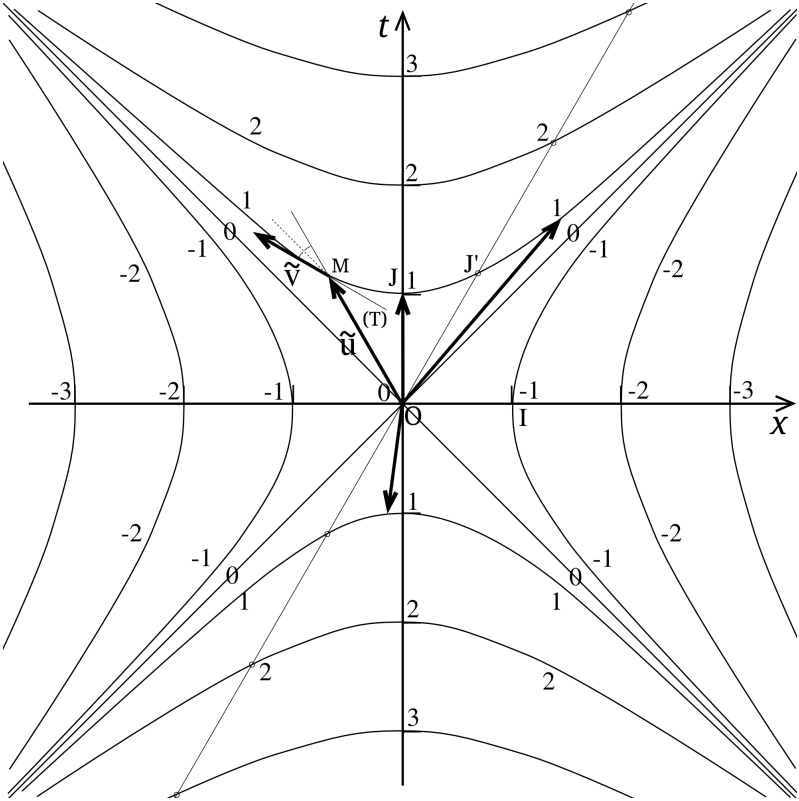
k défini positif.

31 "*Espace et Temps*" par Hermann Minkowski, conférence faite à la 80ème réunion des naturalistes et médecins allemands à Cologne le 21 septembre 1908 (Annales scientifiques de l'É.N.S).

Nous retrouvons facilement les hyperboles par une construction avec le triangle des temps :



Tracé d'une hyperbole interne de paramètre k. *Pour un* x *donné il correspond une valeur de* t *qui forme un triangle rectangle avec* k : $t^2=k^2+x^2$. *Pour un 4-vecteur position* x^μ, *de genre temps,* k *correspond à un temps propre* τ. *Pour une hyperbole externe,* k *est représenté par une droite verticale et c'est* x *qui est placé à l'hypoténuse :* $x^2=k^2+t^2$.



Une géométrie hyperbolique : les vecteurs de même pseudo-norme qui débutent en O finissent sur le même couple d'hyperboles. Nous avons représenté quatre quadrivecteurs qui ont la même pseudo-norme 1, ils rejoignent l'hyperbole unité sur l'une ou l'autre de ces deux branches. Les hyperboles de genre temps sont indicées par k *et celle de genre espace par* -k.

Une propriété de l'hyperbole : si nous traçons un rayon OM, la tangente (T) est toujours symétrique par rapport aux bissectrices à (OM). Nous obtenons ainsi un couple de vecteurs orthogonaux : $\tilde{u} \cdot \tilde{v} = 0$.

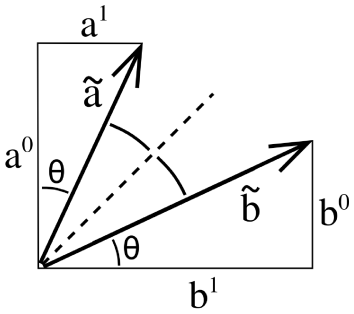
Pour un ensemble d'hyperboles de même centre O, de mêmes axes orthogonaux, et de paramètres multiples de l'unité, une droite passant par O coupe les hyperboles en un ensemble de points équidistants.

En **2D**, dans le plan de Minkowski :

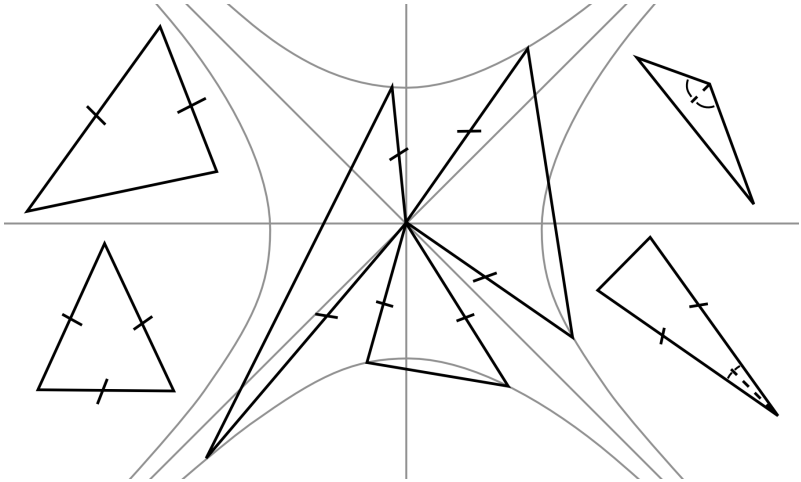
$$\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=0 \quad \Rightarrow \quad a^0 b^0 = a^1 b^1$$

Deux 4-vecteurs orthogonaux sont symétriques par rapport aux lignes d'univers des photons :

$$\tan\theta=\frac{a^1}{a^0}=\frac{b^0}{b^1}$$



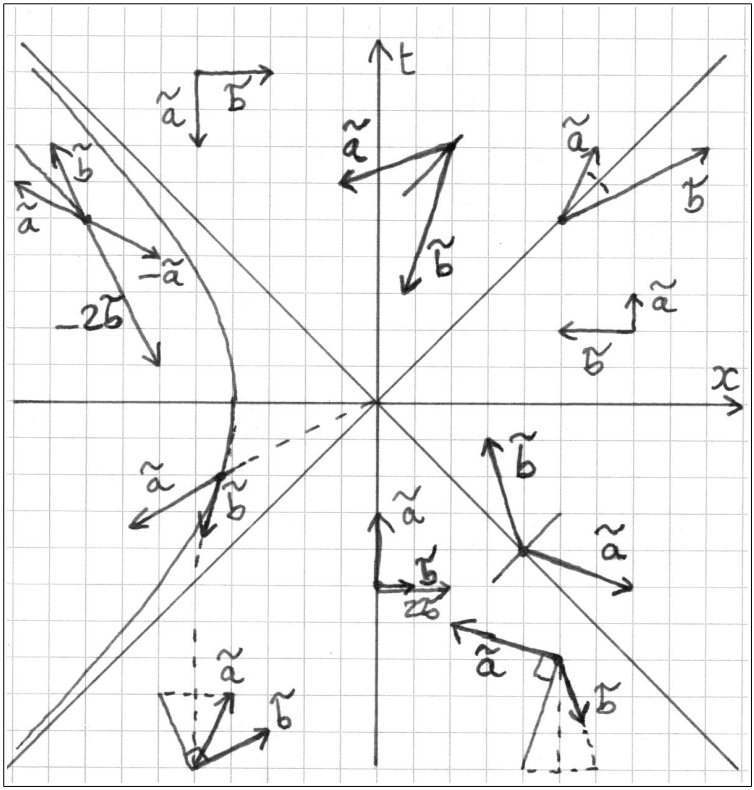
Triangles



Quatre triangles isocèles, un triangle équilatéral, un triangle rectangle et un triangle rectangle isocèle. Tous ces triangles gardent leurs propriétés par rotations de 90° et changement d'échelle.

Exemples de 4-vecteurs orthogonaux

Pour tous les couples représentés : $\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=0$



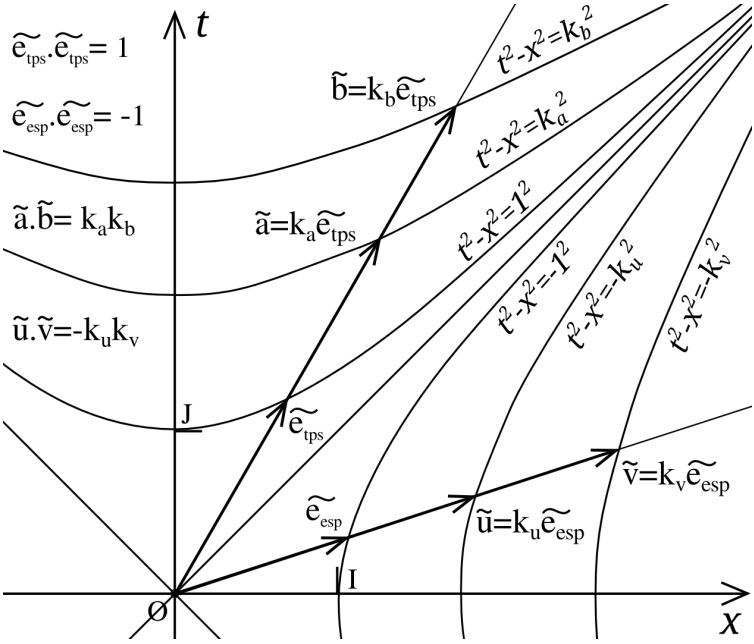
En prenant l'opposé d'un des vecteurs du couple, ou en le multipliant par une constante, le couple reste orthogonal.

Méthodes géométriques :

- *Utilisation de l'hyperbole.*
- *Symétrie par rapport aux lignes d'univers des photons.*
- *Passage par l'euclidien : deux vecteurs perpendiculaires et on prend le symétrique par rapport à la verticale d'un des deux.*

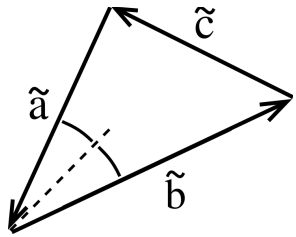
Cas des 4-vecteurs colinéaires :

Deux exemples, le couple ($\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$) et le couple ($\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$)



Théorème de Pythagore dans l'espace de Minkowski :

$\widetilde{a}+\widetilde{b}=\widetilde{c}$ avec $\widetilde{a}$ et $\widetilde{b}$ orthogonaux.



$$k_a^2-k_b^2=\pm k_c^2$$

k : paramètre de l'hyperbole / magnitude / intensité des 4-vecteurs.

∘ Détermination géométrique du produit scalaire

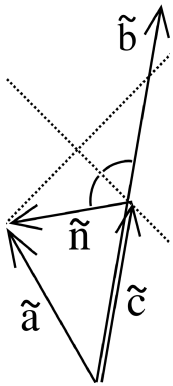
Pour évaluer $\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}$ dans l'espace de Minkowski :

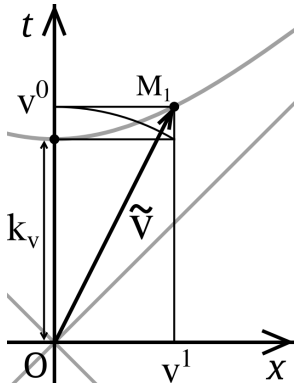
- Nous décomposons l'un des deux quadri-vecteurs comme la somme d'un vecteur orthogonal et d'un vecteur colinéaire au second.

$$\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=(\widetilde{c}+\widetilde{n})\cdot\widetilde{b}=\widetilde{c}\cdot\widetilde{b}+\widetilde{n}\cdot\widetilde{b}$$

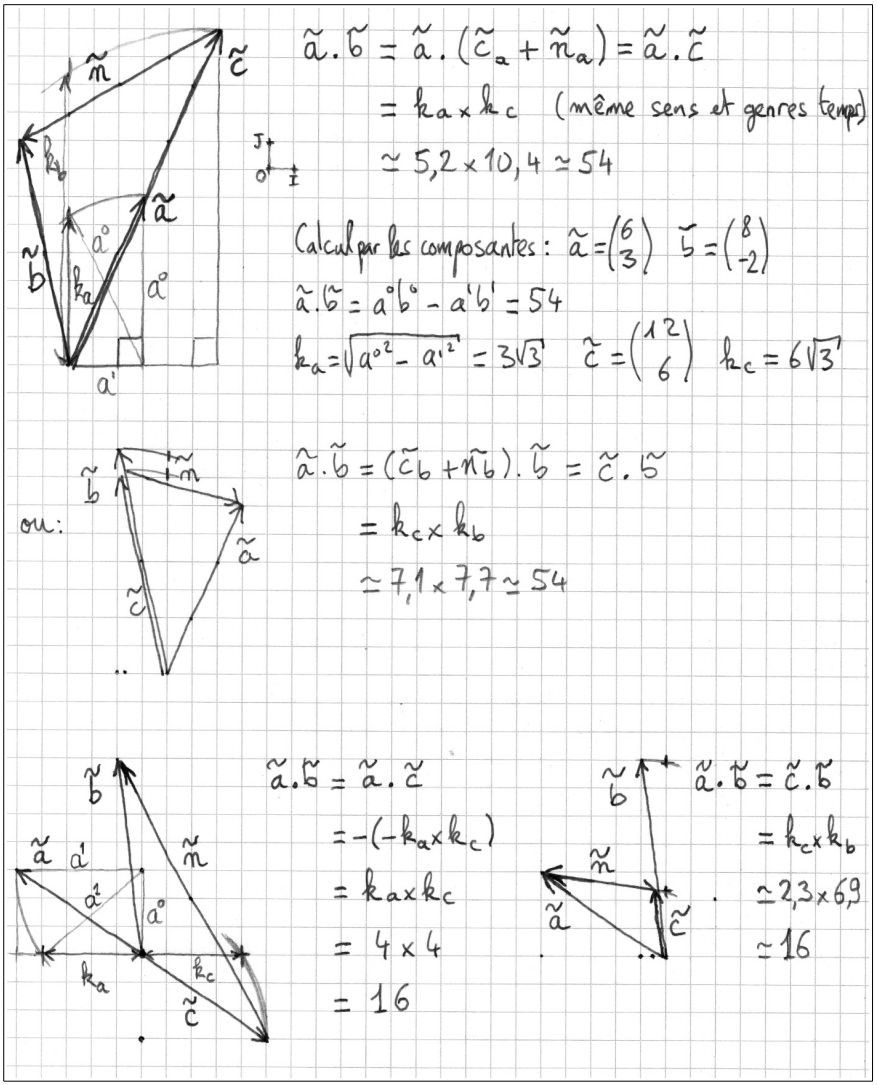
- Nous déterminons avec un compas les paramètres des hyperboles des deux vecteurs colinéaires obtenus.

- Le produit scalaire correspond au produit des deux paramètres : $\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=\widetilde{c}\cdot\widetilde{b}=\pm k_c\times k_b$.
  Le signe est positif si les deux vecteurs colinéaires sont de genre temps et dans le même sens, ou, s'ils sont de genre espace et de sens opposés. Dans les autres cas le signe est négatif.





Exemples de détermination géométrique du produit scalaire :

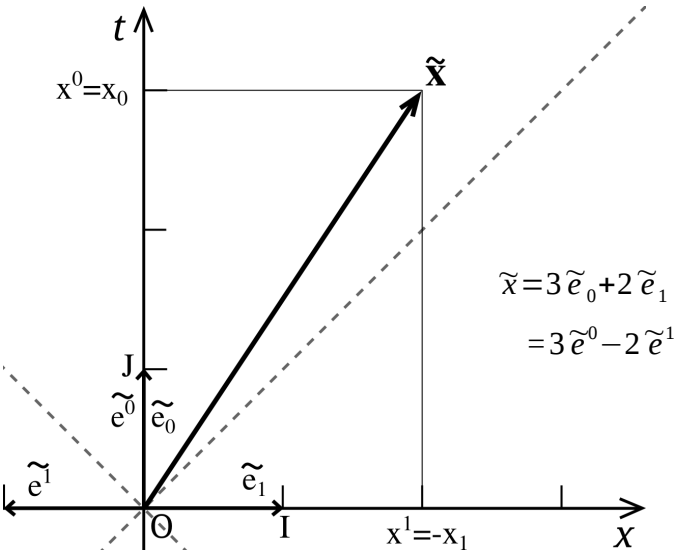


◦ Bases orthogonales

Nous pouvons toujours nous ramener à une base orthogonale telle que $\tilde{e}_\mu \cdot \tilde{e}_\nu = 0$ pour $\mu \neq \nu$.

• Référentiel *R*

Regardons le cas des composantes contravariantes et covariantes sur un diagramme de Minkowski :



Vérifions, sur ce cas particulier, les formules générales :

$$g_{\mu\nu} = \tilde{e}_\mu \cdot \tilde{e}_\nu, \quad \tilde{x} = x^\mu \tilde{e}_\mu,$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad \tilde{e}^\mu = g^{\mu\nu} \tilde{e}_\nu \quad \text{et} \quad \tilde{x} = x_\mu \tilde{e}^\mu.$$

Nous avons bien, en calculant graphiquement les produits scalaires : $\tilde{e}_0 \cdot \tilde{e}_1 = (\vec{e}_0 \cdot s(\vec{e}_1))_{Euclide} = 0 = g_{10}$.

Aussi $\tilde{e}_0 \cdot \tilde{e}_0 = \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = 1$ et $\tilde{e}_1 \cdot \tilde{e}_1 = -\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = -1$ d'où

$g_{00}=1$ et $g_{11}=-1$. La pseudo-norme de $\widetilde{e}_0$ vaut 1 et celle de $\widetilde{e}_1$ vaut -1.

Métrique ramenée à 2D : $g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Pour les composantes covariantes :

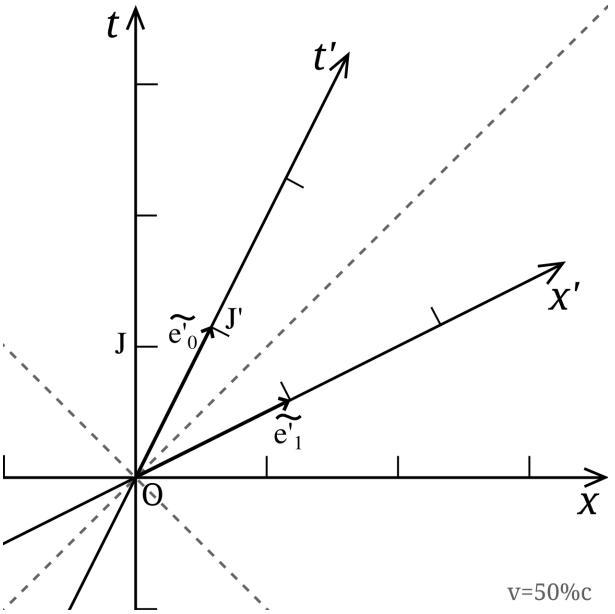
$$x_0=g_{00}x^0+g_{01}x^1=x^0 \quad \text{et} \quad x_1=g_{10}x^0+g_{11}x^1=-x^1$$

$$\widetilde{e}^0=g^{00}\widetilde{e}_0+g^{01}\widetilde{e}_1=\widetilde{e}_0 \quad \text{et} \quad \widetilde{e}^1=g^{10}\widetilde{e}_0+g^{11}\widetilde{e}_1=-\widetilde{e}_1$$

$$\widetilde{x}=x_0\widetilde{e}^0+x_1\widetilde{e}^1=x^0\widetilde{e}_0+x^1\widetilde{e}_1=x_0\widetilde{e}_0-x_1\widetilde{e}_1$$

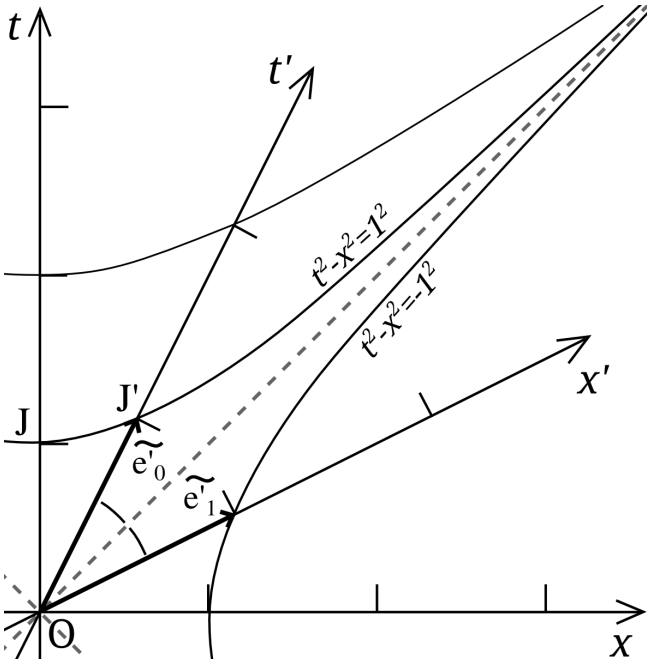
- **Référentiel *R'***

Prenons maintenant le cas du référentiel d'inertie *R'* vu depuis *R* :



Un regard euclidien, non avertit, verrait naïvement une repère non orthogonal et des vecteurs de base de longueur supérieure à un. Il n'en est rien, les vecteurs de la base sont bien orthogonaux car symétriques par rapport à la ligne d'univers d'un photon, et, de plus, le vecteur temporel de la base de *R'* est selon l'hyperbole unité et, donc, de pseudo-norme 1, le vecteur spatial est selon l'hyperbole correspondant à une pseudo-norme -1. La métrique est donc bien la même que pour *R*, ce qui est normal car il n'y a pas de référentiel d'inertie privilégié :

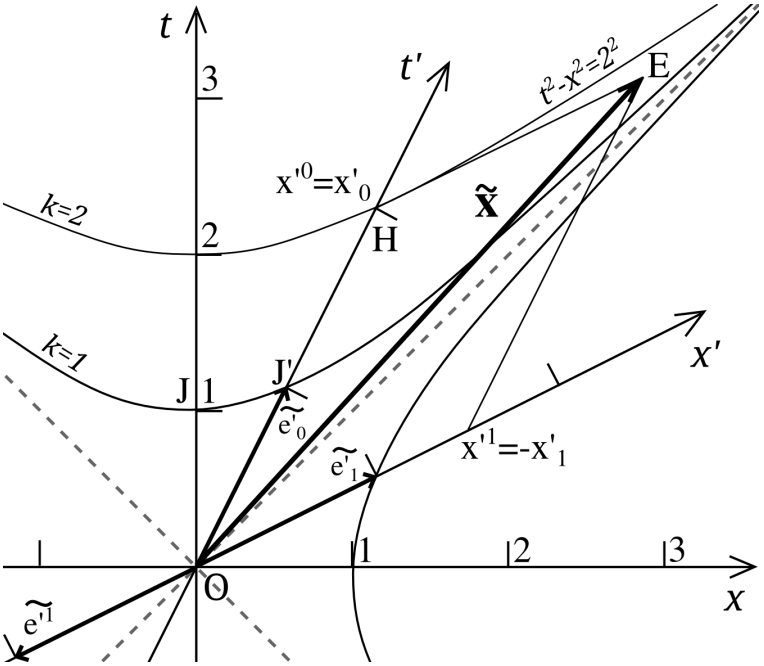
$$g'_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$



Pour les composantes covariantes et la base contravariante, nous avons nécessairement les mêmes relations que pour *R* :

$$x'_0 = x'^0, \quad x'_1 = -x'^1, \quad \tilde{e}'^0 = \tilde{e}'_0 \quad \text{et} \quad \tilde{e}'^1 = -\tilde{e}'_1.$$

$$\tilde{x} = x'^0 \tilde{e}'_0 + x'^1 \tilde{e}'_1 = x'_0 \tilde{e}'^0 + x'_1 \tilde{e}'^1$$



$$\tilde{x} = 2\tilde{e}'_0 + \frac{3}{2}\tilde{e}'_1 = 2\tilde{e}'^0 - \frac{3}{2}\tilde{e}'^1 = \frac{11}{2\sqrt{3}}\tilde{e}_0 + \frac{5}{\sqrt{3}}\tilde{e}_1$$

∞ CHANGEMENT DE COORDONNÉES

Nous pouvons passer d'un système de *n* coordonnées x à un nouveau système de *n* coordonnées x^i, où chacune des *n* coordonnées x'^i dépendent des *n* coordonnées x^i :

$$x'^i(x^1,\ldots,x^2,\ldots,x^n)$$

Nous avons une fonction à *n* variables. Pour une fonction *f* à deux variables, on ajoute les variations selon les deux directions :

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Lorsque nous nous déplaçons de $M(x,y)$ à $M'(x+dx,y+dy)$, infiniment voisin, la fonction *f* varie de df.

La généralisation donne : $df(x^i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i.$

D'où $dx'^i=\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}dx^j$ et $dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}dx'^j.$

Nous notons : $\Lambda^i{}_j=\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$ et $\Lambda_j{}^i=\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}.$

Ces deux tenseurs permettent de passer d'un système de coordonnées à l'autre, ce sont les matrices de changement de base. Les indices du haut correspondent aux lignes et ceux du bas aux colonnes.

Effectuons le produit des deux matrices[32] :

$$\Lambda^{i}{}_{k}\,\Lambda_{j}{}^{k}=\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{j}}=\frac{\partial x'^{i}}{\partial x'^{j}}=\delta_{j}^{i}\,.$$

Les matrices sont inverses l'une de l'autre :

$$\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{\Lambda}^{-1}=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{I}$$

Les composantes covariantes d'un vecteur se transforment selon $\boldsymbol{\Lambda}$, et les composantes contravariantes selon $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$. C'est de là que provient cette fameuse dénomination. De même pour les vecteurs de la base :

$$v'_{i}=\Lambda_{i}{}^{j}v_{j}\qquad v'^{i}=\Lambda^{i}{}_{j}v^{j}\qquad v_{i}=\Lambda^{j}{}_{i}v'_{j}\qquad v^{i}=\Lambda_{j}{}^{i}v'^{j}$$

$$\boldsymbol{e}'_{i}=\Lambda_{i}{}^{j}\boldsymbol{e}_{j}\qquad \boldsymbol{e}'^{i}=\Lambda^{i}{}_{j}\boldsymbol{e}^{j}\qquad \boldsymbol{e}_{i}=\Lambda^{j}{}_{i}\boldsymbol{e}'_{j}\qquad \boldsymbol{e}^{i}=\Lambda_{j}{}^{i}\boldsymbol{e}'^{j}$$

Nous pouvons facilement vérifier que le produit scalaire de deux vecteurs est invariant par changement de base :

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_{i}B^{i}=\Lambda^{j}{}_{i}A'_{j}\Lambda_{k}{}^{i}B'^{k}=\delta_{k}^{j}A'_{j}B'^{k}=A'_{j}B'^{j}$$

Aussi si deux n-vecteurs sont égaux, ils le sont encore après changement de système de coordonnées :

$$A^{i}=B^{i}\;\Rightarrow\;\Lambda^{i}{}_{k}A^{k}=\Lambda^{i}{}_{k}B^{k}\;\Rightarrow\;A'^{i}=B'^{i}\;\Rightarrow\;\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$$

---

32 Quelques outils mathématiques supplémentaires :

Si $x'(x,y)$ et $y'(x,y)$ alors $\dfrac{\partial x'}{\partial y'}=\dfrac{\partial x'}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial y'}+\dfrac{\partial x'}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial y'}$.

Se généralise : $\dfrac{\partial x'^{i}}{\partial x'^{j}}=\dfrac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}}\dfrac{\partial x^{k}}{\partial x'^{j}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x'^{j}}=\dfrac{\partial f}{\partial x^{k}}\dfrac{\partial x^{k}}{\partial x'^{j}}$.

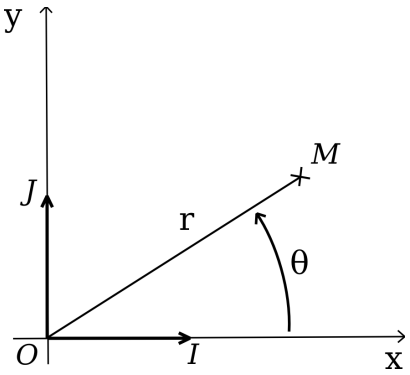
Propriétés fondamentales pour construire les lois physiques, que ce soit en mécanique classique, relativité restreinte ou générale.
Cherchons la nouvelle métrique :

$$g'_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \Lambda_i^{\ k} \boldsymbol{e}_k \cdot \Lambda_j^{\ l} \boldsymbol{e}_l = \Lambda_i^{\ k} \Lambda_j^{\ l} g_{kl}$$

De manière générale, on applique autant de fois qu'il y a d'indices la matrice de changement de base sur un tenseur. Par exemple, sur le tenseur de courbure de Riemann :

$$R'^{\alpha}_{\ \beta\gamma\delta} = \Lambda^{\alpha}_{\ \mu} \Lambda_{\beta}^{\ \nu} \Lambda_{\gamma}^{\ \rho} \Lambda_{\delta}^{\ \lambda} R^{\mu}_{\ \nu\rho\lambda}$$

∘ **Rotation en géométrie euclidienne :**



$$\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$$

$$x'^1 = x\left(x^1 = r\,;\, x^2 = \theta\right)$$

$$x'^2 = y$$

$$\Lambda^1_{\ 1} = \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \Lambda^1_{\ 2} = \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\Lambda^2_{\ 1} = \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \Lambda^2_{\ 2} = \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

soit $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

$$\Lambda_1{}^1=\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\theta \quad \text{car} \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Lambda_1{}^2=\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r} \quad \text{car} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=1$$

$$\Lambda_2{}^2=\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{1/x}{1+y^2/x^2}=\frac{\cos\theta}{r} \qquad \Lambda_2{}^1=\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta$$

$$\text{soit} \quad \mathbf{\Lambda^{-1}}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

nous avons bien $\mathbf{\Lambda\Lambda^{-1}=\Lambda^{-1}\Lambda=I}$.

$$\boldsymbol{e}_1=\vec{e}_r=\Lambda^1{}_1\boldsymbol{e}'_1+\Lambda^2{}_1\boldsymbol{e}'_2=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\boldsymbol{e}_2=\vec{e}_\theta=\Lambda^1{}_2\boldsymbol{e}'_1+\Lambda^2{}_2\boldsymbol{e}'_2=-r\sin\theta\,\vec{i}+r\cos\theta\,\vec{j}$$

La base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ est orthogonale et non normée. Pour une base orthonormée nous avons les vecteurs unitaires tels que $\vec{e}_r=\vec{u}_r$ et $\vec{e}_\theta=r\,\vec{u}_\theta$.

$$\text{Métriques :} \quad g'_{ij}=\begin{pmatrix} \vec{i}\cdot\vec{i} & \vec{i}\cdot\vec{j} \\ \vec{j}\cdot\vec{i} & \vec{j}\cdot\vec{j} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad g_{ij}=\Lambda^k{}_i\Lambda^l{}_j g'_{kl}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

par exemple $g_{22}=\Lambda^1{}_2\Lambda^1{}_2 g'_{11}+\Lambda^2{}_2\Lambda^2{}_2 g'_{22}+0+0=r^2$

Élément de longueur invariant :

$$dl^2=\vec{dl}\cdot\vec{dl}=dx'_i dx'^i=g'_{ij}dx'^i dx'^j=dx^2+dy^2$$
$$dl^2=dx_i dx^i=g_{ij}dx^i dx^j=dr^2+r^2 d\theta^2$$

Composantes d'un vecteur : $\vec{v}(v^x,v^y)$

$$v^1=v^r=\Lambda_1{}^1 v'^1+\Lambda_2{}^1 v'^2=\cos\theta\, v^x+\sin\theta\, v^y$$

$$v^2=v^\theta=\Lambda_1{}^2 v'^1+\Lambda_2{}^2 v'^2=-\frac{\sin\theta}{r}v^x+\frac{\cos\theta}{r}v^y$$

on a bien $\vec{v}\cdot\vec{v}=g_{ij}v^i v^j=(v^x)^2+(v^y)^2=g'_{ij}v'^i v'^j$

∘ **Transformée de Lorentz :** $\begin{cases} ct'(ct,x)=\gamma(ct-\beta x) \\ x'(ct,x)=\gamma(x-\beta ct) \end{cases}$

$$x'^0=ct'(x^0=ct;x^1=x) \qquad x'^1=x'$$

$$\Lambda^0{}_0=\frac{\partial ct'}{\partial ct}=\gamma \qquad \Lambda^0{}_1=\frac{\partial ct'}{\partial x}=-\gamma\beta$$

$$\Lambda^1{}_0=\frac{\partial x'}{\partial ct}=-\gamma\beta \qquad \Lambda^1{}_1=\frac{\partial x'}{\partial x}=\gamma$$

soit $\mathbf{\Lambda}=\Lambda^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma\end{pmatrix}$

Transformée spéciale inverse : $\begin{cases} ct=\gamma(ct'+\beta x') \\ x=\gamma(x'+\beta ct') \end{cases}$

D'où : $\mathbf{\Lambda^{-1}}=\Lambda_\nu{}^\mu=\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma\end{pmatrix}$ et $\mathbf{\Lambda\Lambda^{-1}}=\mathbf{\Lambda^{-1}\Lambda}=\boldsymbol{I}$.

Vecteurs de base :

$$\widetilde{e}_0=\widetilde{e}_t=\Lambda^0{}_0\,\widetilde{e}\,'_0+\Lambda^1{}_0\,\widetilde{e}\,'_1 \quad \text{et} \quad \widetilde{e}_t=\gamma(\widetilde{e}_{t'}-\beta\,\widetilde{e}_{x'})$$

$$\widetilde{e}_0=\widetilde{e}_t=\Lambda^0{}_0\,\widetilde{e}\,'_0+\Lambda^1{}_0\,\widetilde{e}\,'_1 \quad \text{et} \quad \widetilde{e}_x=\gamma(-\beta\,\widetilde{e}_{t'}+\widetilde{e}_{x'})$$

aussi $\widetilde{e}_{t'}=\gamma(\widetilde{e}_t+\beta\,\widetilde{e}_x)$ et $\widetilde{e}_{x'}=\gamma(\beta\,\widetilde{e}_t+\widetilde{e}_x)$

Pour les diagrammes de Minkowski, nous retrouvons les résultats donnés pages 42 et suivante. Sur une feuille de papier euclidienne le vecteur $\widetilde{e}_{t'}$ apparaît plus long que $\widetilde{e}_t$: $\|\widetilde{e}_{t'}\|_{Euclide}=\gamma\sqrt{1+\beta^2}$.

Angle apparent : $\widehat{(\widetilde{e}_t,\widetilde{e}_{t'})}_{Euclide}=\arctan\beta$.

Métriques : $g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\widetilde{e}_t\cdot\widetilde{e}_t & \widetilde{e}_t\cdot\widetilde{e}_x\\ \widetilde{e}_x\cdot\widetilde{e}_t & \widetilde{e}_x\cdot\widetilde{e}_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$$\widetilde{e}_{t'}\cdot\widetilde{e}_{t'}=\gamma^2(\widetilde{e}_t\cdot\widetilde{e}_t+2\beta\,\widetilde{e}_t\cdot\widetilde{e}_x+\beta^2\widetilde{e}_x\cdot\widetilde{e}_x)=1$$

et ainsi de suite, d'où $g'_{\mu\nu}=\Lambda_\mu{}^\alpha\,\Lambda_\nu{}^\beta\,g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

La métrique reste la même.

L'invariant ds^2 : $ds^2=g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu=c^2\,dt^2-dx^2$

$$=g'_{\mu\nu}\,dx'^\mu\,dx'^\nu=c^2\,dt'^2-dx'^2$$

Composantes d'un vecteur : $\widetilde{v}\,(v^t,v^x)$

$$v'^0=v^{t'}=\Lambda^0{}_0\,v^0+\Lambda^0{}_1\,v^1=\gamma\,(v^t-\beta\,v^x)$$

$$v'^1=v^{x'}=\Lambda^1{}_0\,v^0+\Lambda^1{}_1\,v^1=\gamma\,(-\beta\,v^t+v^x)$$

Nous retrouvons bien la transformation de Lorentz qui s'applique à tout quadrivecteur.

Aussi : $\widetilde{v}\cdot\widetilde{v}=g_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu}=(v^{t})^{2}-(v^{x})^{2}=(v^{t'})^{2}-(v^{x'})^{2}$

Et le produit scalaire est bien invariant :

$$\widetilde{u}\cdot\widetilde{v}=g_{\mu\nu}u'^{\mu}v'^{\nu}=u'^{0}v'^{0}-u'^{1}v'^{1}-u'^{2}v'^{2}-u'^{3}v'^{3}$$
$$=\gamma^{2}(u^{0}-\beta u^{1})(v^{0}-\beta v^{1})-\gamma^{2}(u^{1}-\beta u^{0})(v^{1}-\beta v^{0})-u^{2}v^{2}-u^{3}v^{3}$$
$$=\gamma^{2}(1-\beta^{2})u^{0}v^{0}+0+0-\gamma^{2}(1-\beta^{2})u^{1}v^{1}-u^{2}v^{2}-u^{3}v^{3}$$
$$=u^{0}v^{0}-u^{1}v^{1}-u^{2}v^{2}-u^{3}v^{3}=g_{\mu\nu}u^{\mu}v^{\nu}$$

Pour tout 4-vecteur nous avons la transformée spéciale de Lorentz :

$$\begin{cases} v^{t'}=\gamma(v^{t}-\beta v^{x}) \\ v^{x'}=\gamma(v^{x}-\beta v^{t}) \\ v^{y'}=v^{y} \\ v^{z'}=v^{z} \end{cases}$$

Matrices lambda de changement de coordonnées :

$$\mathbf{\Lambda}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda^{-1}}=\Lambda_{\nu}{}^{\mu}=\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le quadrivecteur vitesse

Après avoir construit une nouvelle géométrie de l'espace et du temps, construisons la nouvelle physique qu'il lui est associée. Le vecteur position et le temps universel ont été remplacés par le quadrivecteur $\widetilde{x}$. Qu'en sera-t-il des autres grandeurs physiques introduites par Newton : la vitesse, l'accélération, la quantité de mouvement, l'énergie, la force, etc ?

Tous d'abord, nous cherchons des grandeurs qui se transforment selon la transformation de Lorentz, ensuite, nous établirons des lois qui redonnent celle de la mécanique classique aux faibles vitesses, et bien sûr, le critère suprême, la vérification expérimentale finalisera la sélection.

Nous allons construire la vitesse covariante à partir du quadrivecteur x^{μ}. Nous reprenons la démarche classique qui permet de construire un vecteur tangent à la trajectoire d'un objet. Pour deux événements d'une ligne d'univers infiniment voisins, nous avons le 4-vecteur infinitésimal :

$$d\widetilde{x} = \widetilde{EE'} = \widetilde{x}(E') - \widetilde{x}(E).$$

Pour définir la vitesse, il suffit alors de diviser par la durée, tout aussi infinitésimale, qui sépare ces deux événements. Bien sûr, en mécanique de Newton, il n'y a aucune hésitation à avoir, par contre, en relativité restreinte, nous avons la durée dt mesurée dans le même référentiel que les dx^{μ}, ou bien, la durée $d\tau$ mesurée dans le référentiel propre de

l'objet en mouvement. Aucune hésitation car $d\tau$ est la seule durée invariante par la transformée de Lorentz[33], d'où l'expression de la quadrivitesse :

$$\widetilde{u}=\frac{d\,\widetilde{x}}{d\,\tau} \quad \text{et} \quad u^{\mu}=\frac{d\,x^{\mu}}{d\,\tau}$$

Pour les trois composantes spatiales, nous retrouvons bien la vitesse classique $\vec{v}$ aux faibles vitesses :

$$\widetilde{u}=(\gamma c\,,\gamma\vec{v})$$

$$\text{avec} \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \beta=\frac{v}{c},\quad v=\|\vec{v}\|,$$

$$\gamma(v)=\frac{dt}{d\,\tau},\quad v^i=\frac{d\,x^i}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{v}=(v^1,v^2,v^3).$$

Cette quadrivitesse se transforme bien selon la transformation de Lorentz donnée page 205, ce qui n'était pas le cas de la vitesse classique (facile de s'en convaincre en regardant les relations page 362).

Par exemple, selon l'axe des *x* : $u^x=\frac{d\,x}{d\,\tau}=\gamma\,v^x$.

Pour penser la relativité, il semble logique de raisonner avec la vitesse fournie par cette même théorie, et non avec celle de Newton. Mais comme avec la notion d'espace absolu et de temps absolu, les habitudes sont tenaces, et force est de constater

---

33 $d\tau$ est obtenu en effectuant le produit scalaire de deux quadrivecteurs, il est donc invariant par la transformée de Lorentz :

$$d\,\widetilde{x}\cdot d\,\widetilde{x}=g_{\mu\nu}\,d\,x^{\mu}\,d\,x^{\nu}=c^2\,dt^2-dl^2=c^2\,d\,\tau^2$$

que la vitesse de Newton fait de la résistance.
"On ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière" entend-on. Tout se passerait alors comme s'il y avait une zone interdite de *c* à l'infini. On n'aime pas les interdits, et la nature non plus, elle semble réaliser tout ce qui est possible. Alors, ne supportant pas les limites, dans cette zone soi-disant inaccessible, on met des particules étranges, des *tachions*, particules qui auraient toujours été plus vite que la lumière... sauf que ces tachions violent la causalité, principe de base en physique.
Pensons autrement, utilisons la bonne définition pour la vitesse, celle qui respecte les symétries de l'espace-temps. Quand vous fournissez chaque fois plus d'énergie à une particule pour l'accélérer, elle gagne en vitesse et sa vitesse tend vers l'infini :

$$v_{Newton}=\frac{dx}{dt}\to c, \quad \gamma\to\infty \quad \text{et} \quad v_{Einstein}=\frac{dx}{d\tau}\to\infty.$$

La zone interdite n'existe plus !
Reprenons l'exemple du voyage pour Proxima. Depuis la Terre l'astronaute parcours 4 al, son voyage dure 3 ans, et 5 ans pour les Terriens. Parfois j'entends "mais il va plus vite que la lumière !". Il va bien, moins vite que la lumière, il arrive après un rayon lumineux, et, dans le référentiel du vaisseau, il a parcouru une distance de seulement 2,4 al. Mais il est intéressant de constater que la personne fait finalement référence à la vitesse covariante $u=\Delta x/\Delta\tau=4/3\,c$, et, en termes de vitesse covariante, celle de la lumière est infinie. Finalement, nous ne sommes pas si limités que ça, à des vitesses proches

de *c* on se retrouve de l'autre côté de la galaxie très rapidement. Par exemple, un électron animé d'une vitesse ultra-relativiste peut parcourir 100 000 al en un an (dans son référentiel propre !).

La composante temporelle de $\widetilde{u}$ est toujours positive, la quadrivitesse pointe toujours vers le futur. Calculons la pseudo-norme :

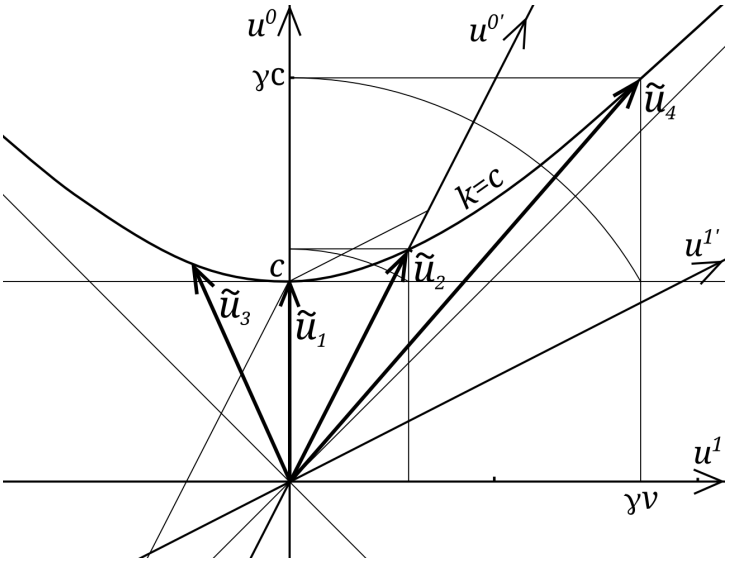
$$\widetilde{u}\cdot\widetilde{u}=\gamma^2 c^2-\gamma^2 v^2=c^2>0$$

La quadrivitesse est un vecteur de genre temps dont l'extrémité est située sur la branche supérieure de l'hyperbole de paramètre *c*. La 4-vitesse ne peut s'annuler, pour une particule au repos il ne reste plus que la composante temporelle qui correspond, en quelque sorte, à la vitesse d'écoulement du temps.

Particule au repos : $\widetilde{u}=(c,\vec{0})$.

Particule en mouvement : $\widetilde{u}=\gamma\, c(1,\vec{\beta})$.

Diagramme de Minkowski pour la 4-vitesse :



$\tilde{u}_1$: *vitesse relativiste d'un objet au repos dans R. Le vecteur est vertical.*

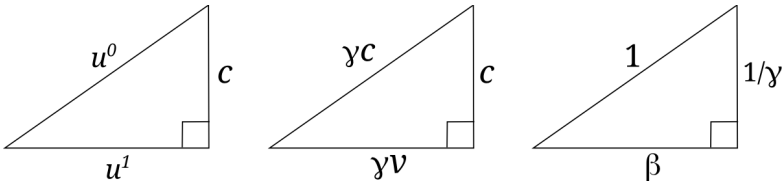
$\tilde{u}_2$: *4-vitesse d'un objet en mouvement vers la droite. L'extrémité est sur l'hyperbole de paramètre c. Le gamma correspondant vaut 1,15 et v=50%c.*

$\tilde{u}_3$: *4-vitesse d'un objet en mouvement vers la gauche.*

$\tilde{u}_4$: *Plus gamma augmente, plus le vecteur vitesse se rapproche de l'asymptote et du cône de lumière.*

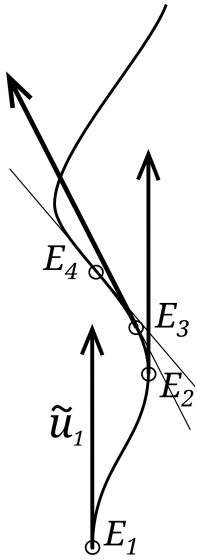
Nous avons construit le repère où la particule 2 est immobile. En projetant l'extrémité de $\tilde{u}_1$ dans R', nous obtenons une particule 1 qui se déplace vers la gauche à 50 % de c.

Le triangle des vitesses : $\tilde{u}\cdot\tilde{u}=(u^t)^2-(u^x)^2=c^2$



(Triangles pour γ=2 et β=√3/2)

Ci-contre, la ligne d'univers d'une particule. La vitesse est toujours tangente à la ligne d'univers et contenue dans le cône de lumière futur. En E_1 la tangente est verticale, la particule est à l'arrêt, ensuite elle se met en mouvement vers la droite, ralentit et s'immobilise plus loin à droite en E_2. Elle reprend son mouvement vers la gauche, accélère et atteint sa vitesse maximale au point d'inflexion en E_4.



Le quadrivecteur accélération

La démarche est bien sûr tout à fait analogue :

$$\widetilde{w}=\frac{d\,\widetilde{u}}{d\,\tau} \quad \text{et} \quad w^{\mu}=\frac{d\,u^{\mu}}{d\,\tau}$$

Comme pour la 4-vitesse, nous ne reprenons pas les notations classiques pour que les différences apparaissent sans ambiguïté : $\widetilde{w}$ pour la quadri-accélération et $\vec{a}$ pour l'accélération de Newton.
Pour commencer, nous avons une belle propriété, la 4-vitesse et la 4-accélération sont des vecteurs orthogonaux :

$$\frac{d}{d\,\tau}(\widetilde{u}\cdot\widetilde{u})=0=\frac{d\,\widetilde{u}}{d\,\tau}\cdot\widetilde{u}+\widetilde{u}\cdot\frac{d\,\widetilde{u}}{d\,\tau} \quad \text{d'où} \quad \widetilde{u}\cdot\widetilde{w}=0.$$

Comme nous avons établi le lien entre $\widetilde{u}$ et $\vec{v}$, nous allons le faire entre $\widetilde{w}$ et $\vec{a}$. Là, par contre, le lien sera bien moins immédiat et les calculs sont plus longs :

$$\widetilde{w}=\frac{d\,\widetilde{u}}{d\,\tau}=\left(\frac{d\,\gamma}{d\,\tau}c\,,\frac{d\,\gamma}{d\,\tau}\vec{v}+\gamma\frac{d\,\vec{v}}{d\,\tau}\right)$$

après calcul : $\dfrac{d\,\gamma}{d\,t}=\dfrac{\gamma^{3}}{c^{2}}\vec{a}\cdot\vec{v}$ et nous posons : $\vec{\beta}=\dfrac{\vec{v}}{c}$

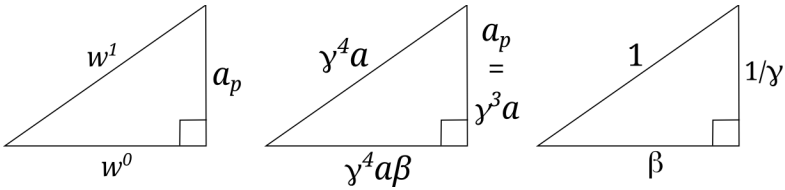
$$\text{d'où :} \quad \widetilde{w}=(\gamma^{4}\vec{a}\cdot\vec{\beta}\ ,\ \gamma^{4}(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}+\gamma^{2}\vec{a})$$

Déterminons maintenant la pseudo-norme de $\widetilde{w}$. Le produit scalaire est le même dans tous les référentiels d'inertie, nous nous plaçons alors dans le référentiel d'inertie qui coïncide à un instant donné

avec le référentiel propre. Dans ce référentiel coïncidant, par définition, $\vec{v}=\vec{0}$ à $t=0$. Ainsi, $\widetilde{w}=(0,\vec{a}(0))$ et $\widetilde{w}\cdot\widetilde{w}=-a_p^2$, où a_p est l'accélération ressentie dans le référentiel propre. Tous les observateurs inertiels tomberont d'accord sur la valeur de l'accélération propre a_p. La 4-accélération est un vecteur de genre espace, en accord avec l'orthogonalité à la quadrivitesse.

Dans le plan de Minkowski $(w^0)^2-(w^1)^2=-a_p^2$ et $\widetilde{w}$ est placé sur une hyperbole de genre espace de paramètre a_p.

Le triangle des accélérations :



Pour un mouvement à une dimension : $\widetilde{w}=\gamma\, a_p(\pm\beta,\pm 1)$

De manière générale on peut toujours se placer localement dans un référentiel d'inertie qui contient la ligne d'univers dans un plan de Minkowski coïncidant sur une portion. Nous avons alors une hyperbole osculatrice qui permet de déterminer l'accélération propre.

∘ Retour sur le voyage pour Proxima

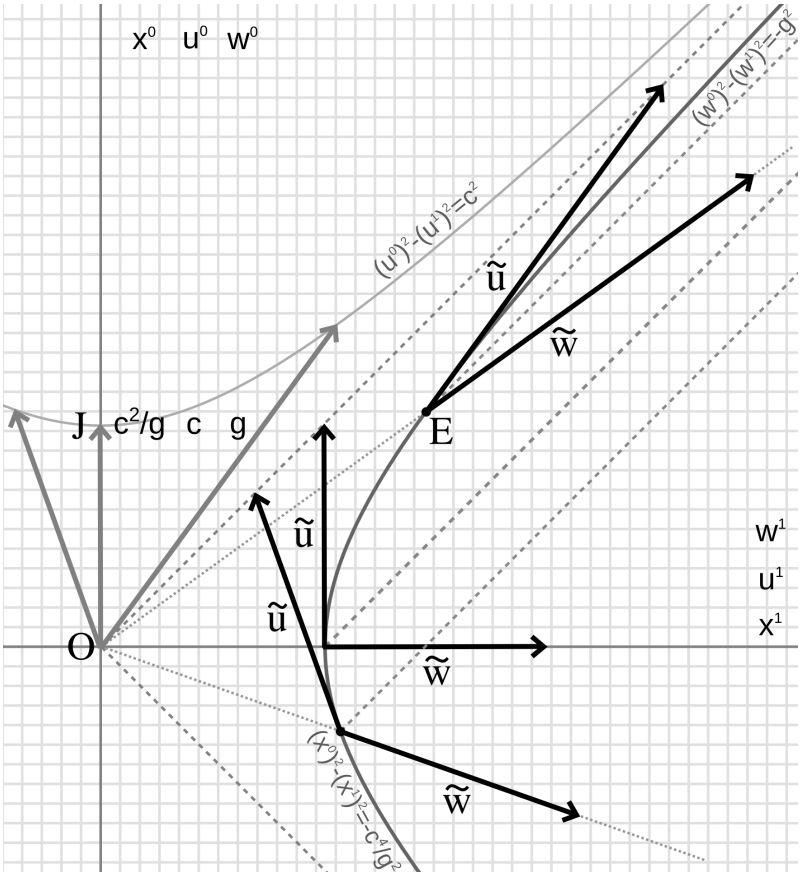
Nous sommes sur un cas particulier de mouvement rectiligne à accélération propre constante, où la ligne d'univers de la fusée correspond avec l'hyperbole de paramètre *g*.
Nous allons élégamment retrouver les expressions de la page 116.
Dans le référentiel d'inertie coïncidant $\widetilde{w}=(0,g)$.
Nous effectuons une transformation de Lorentz pour obtenir les coordonnées de cette même accélération dans le référentiel terrestre :

$$\widetilde{w}=(\gamma\beta g,\gamma g),$$

comme $\gamma\beta g=\gamma^4\vec{a}\cdot\vec{\beta}$ on a $a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{g}{\gamma^3}$

après intégration nous retrouvons les expressions pour $v(t)$ et $x(t)$.

Voyage pour Proxima :

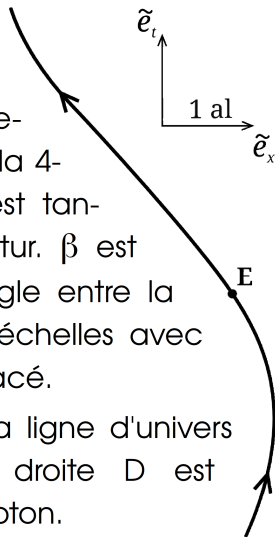


Nous avons représenté les diagrammes de Minkowski pour les trois quadrivecteurs $\widetilde{x}$, $\widetilde{u}$ et $\widetilde{w}$. Nous avons fait un choix adéquat d'unités pour que les hyperboles correspondent : OJ vaut c^2/g pour la 4-position, c pour la 4-vitesse et g pour la 4-accélération. Nous étudions le mouvement uniformément accéléré dans sa généralité, tant pour les t positifs que négatifs : dans ce dernier cas $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont en sens opposés, la fusée décélère, et $\widetilde{w}=(-\gamma\beta g, \gamma g)$. Pour ce mouvement, la ligne d'univers de la fusée est une branche d'hyperbole d'équation

$c^2t^2-x^2=-c^4/g^2$ qui coïncide ici avec la branche d'hyperbole de genre espace de $\widetilde{w}$. La branche d'hyperbole de $\widetilde{u}$ est simplement tournée de 90°. Pour tout événement E de notre ligne d'univers, $\widetilde{u}$ et $\widetilde{w}$ sont comme il se doit symétriques par rapport aux bissectrices, mais, dans cette situation particulière, ils apparaissent, de plus, de même longueur sur notre feuille euclidienne. En effet nous avons dans ce cas $\widetilde{u}/c=\gamma(1,\beta)$ et $\widetilde{w}/g=\gamma(\pm\beta,1)$. Le tracé est très simple, pour tout événement E, vous tracez la droite (OE), $\widetilde{w}$ correspond à $\widetilde{OE}$, et $\widetilde{u}$ est le symétrique par rapport à la ligne d'univers du photon. Bien que la 4-accélération reste constamment sur l'hyperbole de genre espace de paramètre g, sur le diagramme, la longueur d'Euclide de l'accélération relativiste $\widetilde{w}$ augmente avec γ, alors que celle de l'accélération classique $\vec{a}$ diminue en γ^3.

∘ Détermination géométrique de la 4-accélération

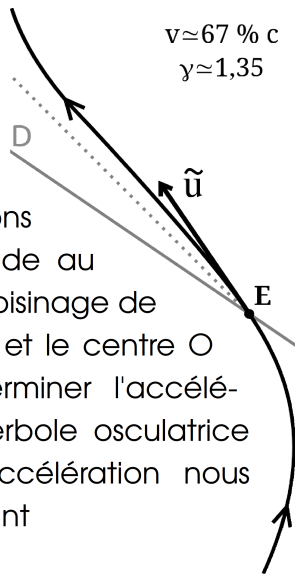
- **À partir de la ligne d'Univers :**



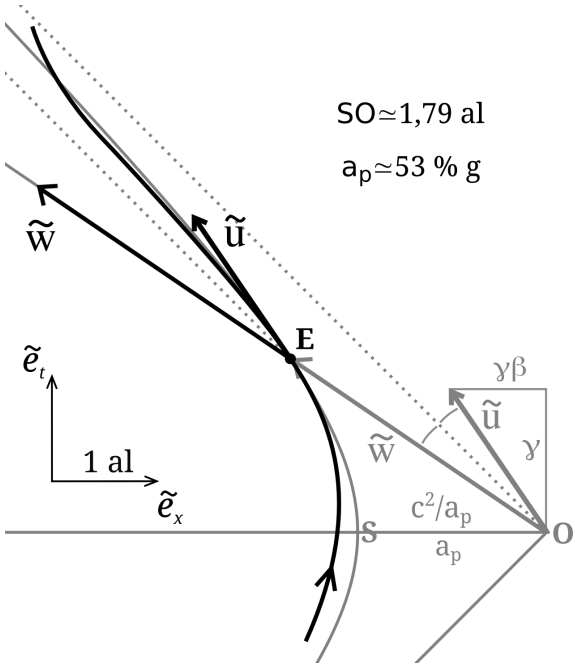
Toute l'information est disponible dans cette ligne. Pour tout événement *E* nous pouvons déterminer la 4-vitesse et la 4-accélération. $\widetilde{u}$ est tangente en *E* et dirigée vers le futur. β est donné par l'arctangente de l'angle entre la verticale et $\widetilde{u}$. En adaptant les échelles avec $c\,\widetilde{e}_{u_0}=\widetilde{e}_t$ nous pouvons réaliser le tracé.

Nous avons ensuite placé en *E* la ligne d'univers d'un photon en pointillés. La droite D est symétrique à $\widetilde{u}$ par rapport au photon.

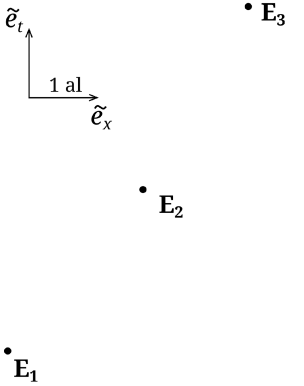
Comme $\widetilde{w}$ est orthogonal à $\widetilde{u}$ son extrémité est nécessairement sur D. Comme la ligne d'Univers continue en dessous de $\widetilde{u}$, il y a accélération et $\widetilde{w}$ est vers le haut. Nous plaçons l'hyperbole osculatrice qui coïncide au mieux avec la ligne d'Univers au voisinage de *E*. La distance entre le sommet S et le centre O de l'hyperbole permet de déterminer l'accélération propre a_p. Pour que l'hyperbole osculatrice corresponde avec celle de l'accélération nous avons le choix d'unités suivant $a_p \widetilde{e_{w_1}} = c^2 / a_p \widetilde{e_x} = \widetilde{SO}$.



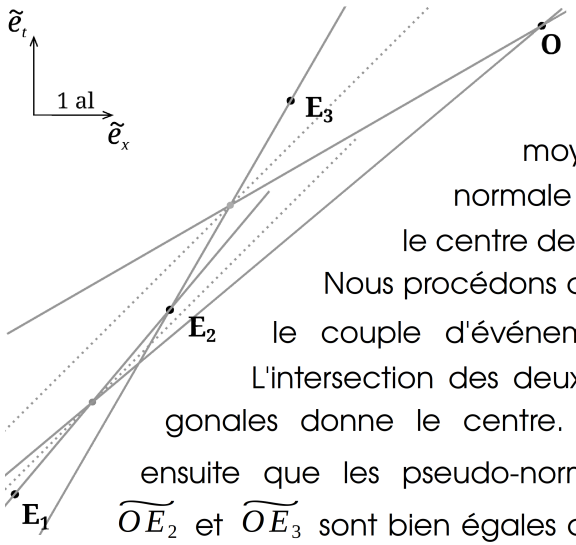
Pour tout événement d'une ligne d'univers, il existe toujours une hyperbole tangente unique qui donne l'accélération propre.



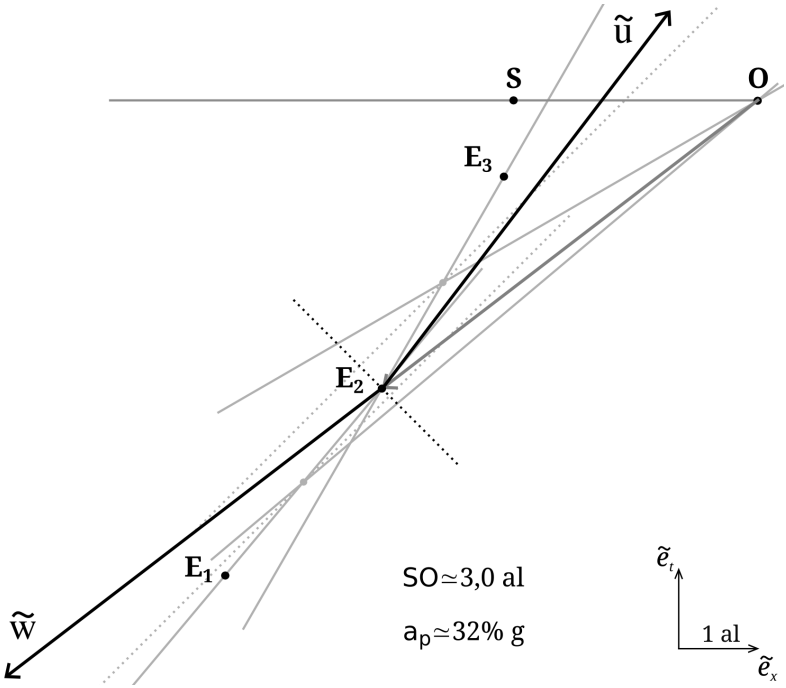
- **À partir de trois événements voisins :**



Précédemment, il n'était pas facile de déterminer l'hyperbole tangente. Ici, à partir de trois événements nous trouverons l'hyperbole osculatrice optimisée pour le point milieu E_2. Nous savons que trois points déterminent une hyperbole unique. L'approche est la même en géométrie euclidienne, si vous disposez de trois points d'un cercle vous trouvez le cercle tangent à l'aide de deux médiatrices dont l'intersection fournie le centre du cercle. Ici aussi les tangentes sont normales aux rayons.



$\widetilde{E_1E_2}$ est selon la vitesse moyenne $\tilde{u}_{12}$, et la normale contient $\tilde{w}_{12}$ et le centre de l'hyperbole O. Nous procédons de même avec le couple d'événements (E_2, E_3). L'intersection des deux droites orthogonales donne le centre. Nous vérifions ensuite que les pseudo-normes de $\widetilde{OE_1}$, $\widetilde{OE_2}$ et $\widetilde{OE_3}$ sont bien égales aux largeurs de traits près. Nous avons alors $\widetilde{OS}$, le paramètre k_x de l'hyperbole, et l'accélération propre $a_p = -c^2/\overline{SO}$.



∞ ÉQUIVALENCE MASSE-ÉNERGIE

Cherchons l'équivalent relativiste de la relation fondamentale de la dynamique. En mécanique classique :

$$m\vec{a}=\vec{F} \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$$

avec $\vec{p}=m\vec{v}$ la quantité de mouvement.

Nous aurons aussi besoin du théorème de la puissance cinétique : $P_c=\frac{dE_c}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

∘ Le quadrivecteur énergie-impulsion

La masse est une propriété propre à une particule, elle ne dépend pas du référentiel. Il semble donc naturel de considérer le quadrivecteur $\widetilde{p}=m\,\widetilde{u}$. Pour la "4-quantité de mouvement" nous gardons la lettre *p* car contrairement à la 4-vitesse ou la 4-accélération, celle-ci, a directement été adoptée dans les mœurs scientifiques. Sa partie spatiale est communément nommée *impulsion* et le quadrivecteur dans son ensemble peut être nommé la 4-impulsion ou plus précisément le 4-vecteur énergie-impulsion : $\widetilde{p}=(m\gamma c, m\gamma\vec{v})$.

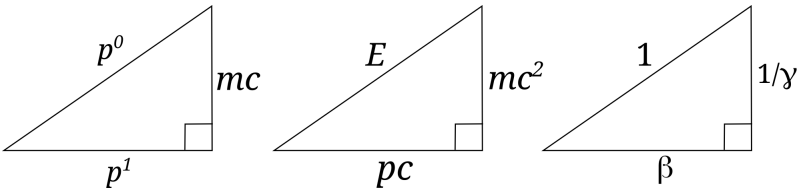
Soit $\boxed{\widetilde{p}=(E/c,\vec{p})}$ avec $\boxed{E=m\gamma c^2}$ et $\boxed{\vec{p}=m\gamma\vec{v}}$

La composante temporelle fait apparaître une quantité homogène à une énergie. Cherchons à quoi correspond cette énergie. Dans le référentiel coïncidant $\widetilde{p}=(mc,\vec{0})$ et $\widetilde{p}\cdot\widetilde{p}=m^2c^2$. Dans le référentiel d'étude $\widetilde{p}\cdot\widetilde{p}=E^2/c^2-\vec{p}^2$. Dans le référentiel propre, où la particule est au repos, $\widetilde{p}\cdot\widetilde{p}=E_r^2/c^2$, d'où $E_r=mc^2$. Une notion tout à fait nouvelle, absente en mécanique classique, apparaît, une énergie est associée à la masse d'un objet. Même au repos, une particule possède une énergie, c'est l'énergie de masse.

Quand la particule est en mouvement :

$$m^2c^2=E^2/c^2-\vec{p}^2 \quad \text{soit} \quad E^2=(mc^2)^2+(pc)^2.$$

Triangle Énergie-Impulsion :



E correspond à l'énergie totale de la particule, qui inclut son énergie de masse et son énergie cinétique :

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 = m^2 c^4 + m^2 \gamma^2 v^2 c^2 = m^2 \gamma^2 c^4$$

et nous trouvons : $E = m \gamma c^2$

Pour l'énergie cinétique : $E_c = E - E_r$.
Aux faibles vitesses :

$$E = m\left(1-\beta^2\right)^{-1/2} c^2 \simeq mc^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

Nous retrouvons bien l'expression classique de l'énergie cinétique.

Pour une particule de masse nulle, comme un photon, $E = pc$, $\tilde{p} = (p, \vec{p})$ et $\tilde{p} \cdot \tilde{p} = 0$.

- **La quadriforce**

Pour la 4-force $\tilde{g}$ nous proposons :

$$\frac{d\tilde{p}}{d\tau} = \tilde{g}$$

Équation covariante par transformation de Lorentz et dont la partie temporelle redonne dans la limite

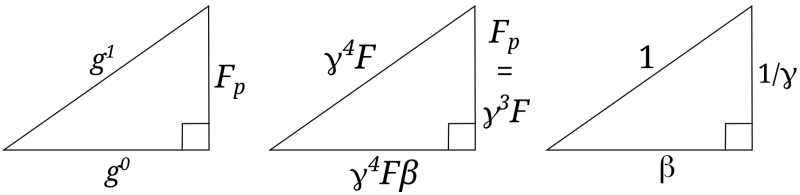
classique le théorème de la puissance cinétique et la partie spatiale la relation fondamentale de Newton :

$$\frac{d\widetilde{p}}{d\tau}=m\widetilde{w}=(\gamma^4\vec{F}\cdot\vec{\beta}\ ,\ \gamma^4(\vec{F}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}+\gamma^2\vec{F})=\widetilde{g}$$

Le lien entre la 4-force et la force de Newton n'est pas trivial. En classique, la force $\vec{F}$ a la même direction et le même sens que l'accélération $\vec{a}$, en relativiste c'est le cas pour $\widetilde{g}$ et $\widetilde{w}$.

Pseudo-norme : $\widetilde{g}\cdot\widetilde{g}=-F_p^2$ avec $F_p=ma_p$.

Le triangle des forces :



Pour un mouvement à une dimension : $\widetilde{g}=\gamma F_p(\pm\beta,\pm1)$.

Pour la partie spatiale : $\frac{d\vec{p}}{d\tau}=\vec{g}$ et $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{\vec{g}}{\gamma}$.

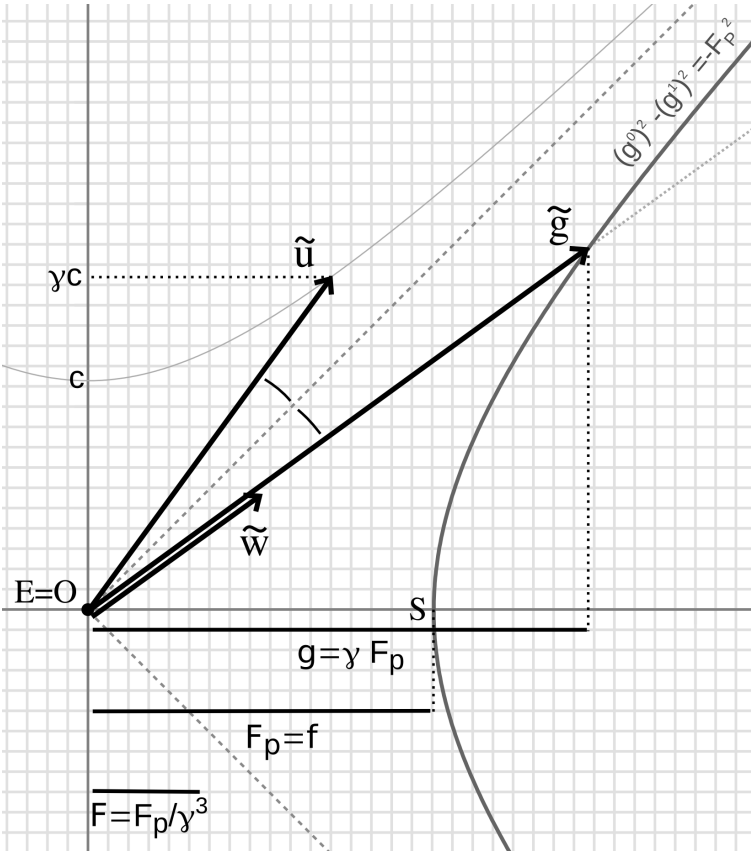
Nous avons la partie spatiale $\vec{g}$ de la 4-force et d'autre part la force classique $\vec{F}$, la relation fondamentale de la dynamique prend alors la forme suivante :

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{\vec{g}}{\gamma}=\gamma^3(\vec{F}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}+\gamma\vec{F}=\vec{f}$$

La relation entre $\vec{g}$ et $\vec{F}$ n'est pas triviale et nous constatons qu'elles ne sont pas colinéaires. Dans la limite des faibles vitesses, nous retrouvons bien la deuxième loi de Newton $m\vec{a}=\vec{F}$.

Le plus souvent, pour construire la relativité, c'est la troisième force $\vec{f}$ qui est utilisée. Lorsqu'on injecte, dans la loi de Newton, l'impulsion à la place de la quantité de mouvement c'est la force qui apparaît. Cette force $\vec{f}$ est communément utilisée en tant qu'équivalent de la force classique au niveau relativiste. Cette force standard a une définition semblable à celle de la mécanique classique, mais elle n'est pas la partie spatiale d'un quadrivecteur covariant.

En mécanique newtonienne la force est indépendante du référentiel d'inertie $\vec{F}'=\vec{F}$, en relativité c'est aussi le cas pour la quadriforce $\tilde{g}'=\tilde{g}$. Par contre, nous avons en général $\vec{f}'\neq\vec{f}$ et $\vec{g}'\neq\vec{g}$.



- **Puissance**

$$\tilde{w}\cdot\tilde{u}=0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}\cdot\tilde{p}=0$$

$$\frac{d\tilde{p}}{d\tau}\cdot\tilde{p}=\frac{dE/c}{d\tau}E/c-\frac{d\vec{p}}{d\tau}\cdot\vec{p}=0$$

$$\gamma\frac{dE}{d\tau}=\vec{g}\cdot\vec{u} \quad \text{et} \quad \frac{dE}{dt}=\vec{f}\cdot\vec{v}$$

∘ Conservation de l'impulsion et de l'énergie

Pour un système *isolé* $\widetilde{g}=\widetilde{0}$ et le quadrivecteur impulsion-énergie est constant. Pour un ensemble de particules, l'impulsion totale est la somme des impulsions individuelles, et de même pour l'énergie :

$$\widetilde{p}=\sum \widetilde{p}_i, \quad E=\sum E_i \quad \text{et} \quad \vec{p}=\sum \vec{p}_i$$

Nous avons alors conservation de ces grandeurs :

$$\widetilde{p}=\widetilde{cst}, \quad E=cste \quad \text{et} \quad \vec{p}=\overrightarrow{cst}$$

Par exemple, lors d'une collision, les particules peuvent changer en nature et en nombre, mais quoi qu'il arrive il y aura toujours conservation de ces trois quantités : elles auront les mêmes valeurs avant et après le choc. Nous pouvons considérer un système isolé dans trois situations : aucune force ne s'exerce sur le système, la somme des forces est nulle, ou, comme lors d'un choc, l'interaction étant très brève, la 4-impulsion du système n'a pas le temps de varier notablement. Les forces internes au système n'interviennent pas dans ces bilans.

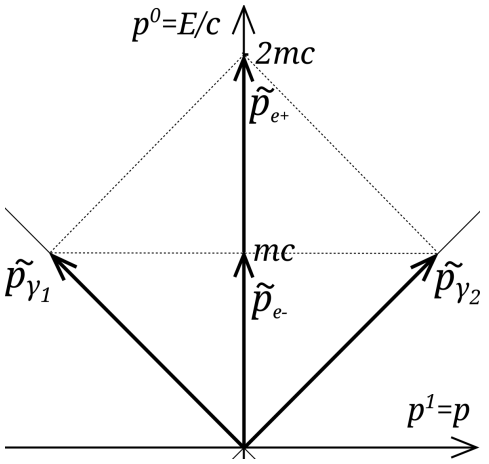
• Annihilation d'un électron avec un positron

Deux photons gamma sont produits :

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma \quad \text{avec} \quad \widetilde{p}_{e^-}+\widetilde{p}_{e^+}=\widetilde{p}_{\gamma_1}+\widetilde{p}_{\gamma_2}$$

Nous prenons le cas où l'électron et le positron ont les mêmes vecteurs vitesse (sens opposés). Dans le référentiel où la particule et l'antiparticule sont au

repos nous avons le diagramme de Minkowski des impulsion-énergies suivant :



Nous avons au minimum deux photons produits par l'annihilation. Il n'est pas possible qu'un seul photon soit produit car un photon ne peut être au repos et son impulsion ne peut s'annuler pour respecter la conservation de l'impulsion dans le référentiel considéré. Si deux photons sont créés, ils ont nécessairement la même énergie et ils partent en sens opposés. L'énergie d'un photon correspond à l'énergie de masse d'un électron (ou ce qui revient au même d'un positron). Les photons ont donc des énergies de 511 keV. Ce sont des photons très énergétiques, à titre de comparaison les photons visibles ont une énergie de l'ordre de l'eV.

Nous étudions en exercice la collision de deux protons avec la création au seuil d'une paire proton-antiproton.

Résumé

Grandeur	Physique classique	Liens / Standards	Physique relativiste
position	$\vec{r}=(x,y,z)$		$\widetilde{x}=(ct,\vec{r})$ $\widetilde{x}\cdot\widetilde{x}=c^2\tau^2$
vitesse	$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{u}=\gamma\vec{v}$ $\gamma=\frac{dt}{d\tau}$	$\widetilde{u}=\frac{d\widetilde{x}}{d\tau}$ $\widetilde{u}=(\gamma c,\vec{u})$ $\widetilde{u}\cdot\widetilde{u}=c^2$
quantité de mouvement / impulsion	$\vec{p}=m\vec{v}$	$\vec{p}=m\gamma\vec{v}$	$\widetilde{p}=m\widetilde{u}$ $\widetilde{p}=(E/c,\vec{p})$ $\vec{p}=m\vec{u}$
accélération	$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$	$w^0=\gamma^4\vec{a}\cdot\vec{\beta}$ $\vec{w}=\gamma^4(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}$ $+\gamma^2\vec{a}$	$\widetilde{w}=\frac{d\widetilde{u}}{d\tau}$ $\widetilde{w}=(w^0,\vec{w})$ $\widetilde{w}\cdot\widetilde{w}=-a_p{}^2$ $\widetilde{u}\cdot\widetilde{w}=0$
force	$\vec{F}=m\vec{a}$	$\vec{f}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{g}=\gamma\vec{f}$	$\vec{g}=\frac{d\vec{p}}{d\tau}$ $\widetilde{g}=m\widetilde{w}$ $\widetilde{g}=(g^0,\vec{g})$
énergie	$\frac{dE_c}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$ $E_c=\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{dE}{dt}=\vec{f}\cdot\vec{v}$	$\gamma\frac{dE}{d\tau}=\vec{g}\cdot\vec{u}$ $E=\gamma mc^2$ $E_c=E-mc^2$

champ électro -magnétique	$\vec{F}_E = q\vec{E}$ $\vec{F}_B = q\vec{v}\wedge\vec{B}$	Force de Lorentz : $\vec{f} =$ $q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$ $\vec{g} = \gamma\vec{f}$	$\widetilde{g} = \boldsymbol{F}\,\widetilde{j}$ $\widetilde{j} = q\,\widetilde{u}$ $\vec{g} =$ $q(\gamma\vec{E}+\vec{u}\wedge\vec{B})$

La définition standard $\vec{f}$ pour la force est largement utilisée par la communauté scientifique, qui résume la relativité en quelques équations :

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \qquad \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{f}_L = q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$$

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v} \qquad E = \gamma m c^2 = T + m c^2.$$

Enseigné directement ainsi c'est rapide et efficace, mais à la fois, si l'étudiant veut approfondir les concepts il sera nécessaire pour lui d'élargir le regard pour avoir une vision limpide et éviter les confusions. De plus, dans notre ouvrage nous mettons en avant une vision géométrique qui s'appuie principalement sur la démarche d'Hermann Minkowski. Ce sont bien sûr les grandeurs covariantes qui se représentent naturellement dans un diagramme et se transforment simplement avec la transformée de Lorentz.

Pour le champ électromagnétique, les quantités sont détaillées en exercice page 252.

∞ Référentiels non-inertiels

Comme on sait le faire en mécanique newtonienne, nous devons aussi apprendre à appliquer la relativité restreinte dans des référentiels non-inertiels.
Rappelons la démarche en mécanique classique. Les lois de Newton sont vérifiées dans des référentiels galiléens et par un changement de référentiel nous trouvons leurs nouvelles expressions dans un référentiel en mouvement quelconque :

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Tout se passe comme si nous avions de nouvelles forces, appelées d'inerties ou fictives. On peut se demander si ces forces existent vraiment. En effet, ces forces ne sont pas liées aux interactions fondamentales mais au changement de référentiel. Il n'empêche que le conducteur et les passagers d'une voiture expérimentent sur les phases d'accélération ces différents effets dynamiques comme bien réels : démarrage en trombe, virages plus ou moins serrés et coups de freins.
La mécanique classique donne une interprétation de ces effets en termes de forces : forces d'entraînement et de Coriolis.
Il va de soi que la relativité restreinte doit permettre de retrouver tous ces effets. À vitesses faibles, ils doivent être équivalents. Nous aurons des effets nouveaux qui apparaîtront avec l'augmentation de la vitesse. Mais aussi, dès les faibles vitesses, pour des mesures précises et pour le comportement de la

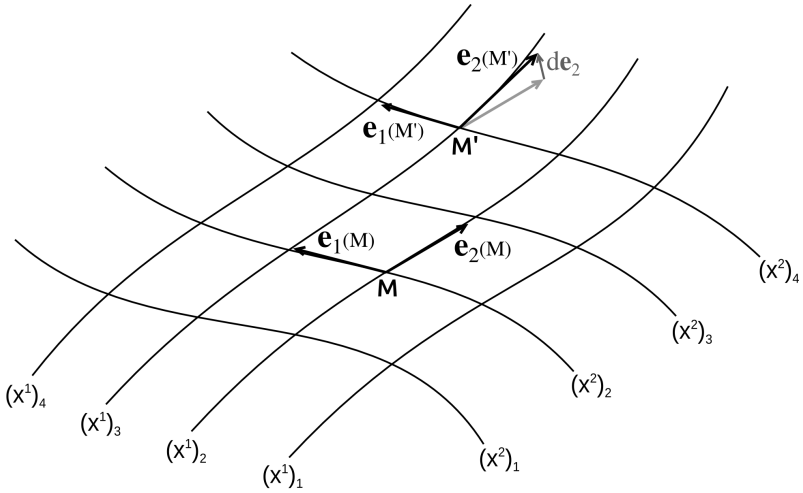
lumière qui est maintenant incluse dans le cadre théorique. L'interprétation est par contre très différente.

En relativité restreinte, il n'y a pas de forces d'inertie mais des *effets métriques*. Par un changement de référentiel non-inertiel, on s'écarte de la métrique minkowskienne et une particule libre suit une géodésique qui modifie son mouvement initialement rectiligne et uniforme pour suivre une trajectoire courbe et accélérée. Par exemple, quand la voiture accélère au feu vert, ce n'est pas une force d'inertie qui vous plaque contre le siège, mais une modification métrique qui vous met en chute libre vers l'arrière de la voiture (comme dans la fusée uniformément accélérée). Dans le même temps les montres des passagers à l'arrière prennent du retard sur celles de devant. Tout le contraire lors d'un coup de frein, la modification métrique vous fait tomber en chute libre vers le pare-brise. Dans un virage, la variation de la métrique vous fait chuter vers l'extérieur du virage, les montres vont aussi se désynchroniser et les postulats d'Euclide ne seront plus vérifiés. En relativité restreinte, la notion de force d'inertie et remplacée par celle d'effet métrique. Nous avons précédemment étudié les deux cas particuliers du référentiel uniformément accéléré et du référentiel en rotation uniforme et nous allons maintenant nous intéresser au cas général[34].

34 Nous faisons ici l'analogie entre la mécanique classique et la relativité restreinte, mais historiquement nous sommes plutôt habitués à l'analogie faite avec la relativité générale. Dans ce cadre analogique, lors d'un coup de frein, on dit que, tout se passe comme

◦ Lignes coordonnées, bases locales et connexions

Nous complétons ici notre description d'un espace vectoriel. Ce sont des concepts mathématiques très généraux utilisables dans tous les domaines scientifiques.



Les lignes coordonnées sont obtenues lorsque qu'une coordonnée varie et que toutes les autres sont fixées. En chaque point de ce réseau nous avons une base locale avec les vecteurs de base tangents aux lignes. Quand nous passons de M à M' infiniment voisin, nous avons une petite variation des vecteurs de base :

---

si, un champ de gravitation vous attirait vers l'avant. Ce champ de gravitation est bien sûr fictif. S'il était réel, en même temps que vous freinez, un mur massif gigantesque et de taille infini devrait apparaître devant la voiture pour justifier un tel champ de pesanteur ! En relativité générale, le champ de gravitation crée un effet métrique supplémentaire, l'espace-temps est alors courbe, et le champ de gravitation est bien réel (il existe dans tous les référentiels d'observation).

$$d\,\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} dx^j = \Gamma^k{}_{ij}\,\boldsymbol{e}_k\, dx^j$$

Cette variation peut se projeter sur la base de départ. Les quantités $\Gamma^k{}_{ij}$ permettent d'encoder la variation de la base locale en ce point. Nous appellerons *connexion* l'objet $\Gamma^k{}_{ij}$. Pour une base globale, qui ne dépend pas du point, toutes les composantes de la connexion sont nulles.

La connexion est symétrique sur les deux derniers indices :

$$\Gamma^k{}_{ij}\,\boldsymbol{e}_k = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{MM'}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{MM'}}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{MM'}}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma^k{}_{ji}\,\boldsymbol{e}_k$$

La métrique contient toute l'information sur l'espace. Nous pouvons établir l'expression des coefficients de connexion en fonction de la métrique :

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \quad d\,g_{ij} = \partial_k g_{ij}\, dx^k = (d\,\boldsymbol{e}_i)\cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot (d\,\boldsymbol{e}_j)$$

$$g_{ij,k}\, dx^k = (\Gamma^l{}_{ir}\,\boldsymbol{e}_l\, dx^r)\cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot (\Gamma^m{}_{jn}\,\boldsymbol{e}_m\, dx^n)$$

$$g_{ij,k} = g_{lj}\Gamma^l{}_{ik} + g_{im}\Gamma^m{}_{jk}$$

$$g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}$$
$$= g_{lj}\Gamma^l{}_{ik} + g_{im}\Gamma^m{}_{jk} + g_{li}\Gamma^l{}_{kj} + g_{km}\Gamma^m{}_{ij} - g_{lk}\Gamma^l{}_{ji} - g_{jm}\Gamma^m{}_{ki}$$

$$g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i} = 2\,g_{im}\Gamma^m{}_{jk}$$

$$g^{ni}(g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}) = 2\,g^{ni} g_{im}\Gamma^m{}_{jk}$$

Finalement : $\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}(g_{lj,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l})$

∘ Dérivée covariante

Variation d'un vecteur **A** lors d'un déplacement de M à M' : d**A**=**A**(M')-**A**(M). Dans la base de Minkowski, ou dans une base cartésienne, nous sommes dans des cas particuliers où la base est globale, la base ne dépend pas du point et seules les variations sur les composantes sont à prendre en compte. Dans le cas général : $d\,\boldsymbol{A} = d\left(A^i \boldsymbol{e}_i\right) = d\left(A^i\right)\boldsymbol{e}_i + A^i\, d\,\boldsymbol{e}_i$.

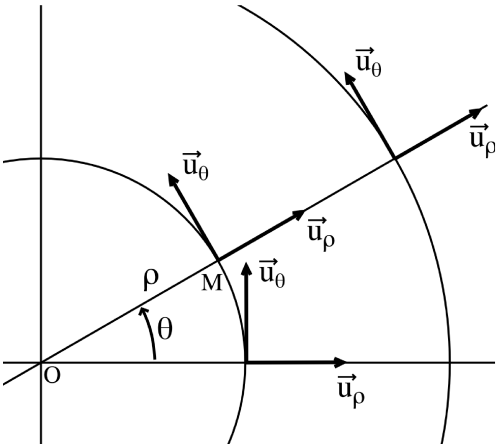
$$d\,\boldsymbol{A} = \partial_j A^i\, dx^j \boldsymbol{e}_i + \Gamma^k{}_{ij} A^i\, dx^j \boldsymbol{e}_k = \left(\partial_j A^i + \Gamma^i{}_{kj} A^k\right) dx^j \boldsymbol{e}_i$$

Notations : $D_j A^i = A^i{}_{;j} = \partial_j A^i + \Gamma^i{}_{kj} A^k$ et $D\,A^i = A^i{}_{;j}\, dx^j$

Le grand D permet de préciser que l'on a bien tenu compte de toutes les variations. Pour les référentiels inertiels, les connexions sont nulles dans la base de Minkowski, et ∂_μ était notre dérivée covariante. Dans les référentiels non-inertiels D_μ est la dérivée covariante.

∘ Illustration sur un exemple

Prenons le cas des coordonnées polaires.



La base dépend du point.
Elle tourne avec l'angle θ et reste inchangée quand ρ varie :
$\vec{u}_\rho(\theta)$ et $\vec{u}_\theta(\theta)$.

En mécanique classique, nous

prenons habituellement des vecteurs unitaires.

Variations de la base : $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}=\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}=-\vec{u}_\rho$.

D'où : $\overrightarrow{OM}=\vec{r}=\rho\vec{u}_\rho$ donne $\vec{v}=\dot{\rho}\vec{u}_\rho+\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et

$$\vec{a}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho+(\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

Nous pouvons retrouver ce résultat avec la métrique et les connexions :

$$ds^2=g_{ij}dx^i dx^j=dl^2=d\rho^2+\rho^2 d\theta^2 \qquad dl^2/dt^2=g_{ij}v^i v^j$$

$$\vec{e}_\rho=\vec{u}_\rho \quad \vec{e}_\theta=\rho\vec{u}_\theta \quad \overrightarrow{OM}=\rho\vec{e}_\rho+\theta\vec{e}_\theta \quad \vec{v}=\frac{d\vec{l}}{dt}=(\dot{\rho},\dot{\theta})$$

$$g_{22,1}=2\rho \qquad \Gamma^1{}_{11}=0 \qquad \Gamma^2{}_{22}=0 \qquad \Gamma^2{}_{11}=0$$

$$\Gamma^1{}_{22}=-\frac{1}{2}g^{11}g_{22,1}=-\rho \qquad \Gamma^2{}_{12}=\frac{1}{2}g^{22}g_{22,1}=\frac{1}{\rho} \qquad \Gamma^1{}_{12}=0$$

$$d\vec{v}=(\partial_j v^i+\Gamma^i{}_{kj}v^k)dx^j\vec{e}_i$$

$$\vec{a}=(\partial_j v^i+\Gamma^i{}_{kj}v^k)\dot{x}^j\vec{e}_i=\partial_t v^i\vec{e}_i+\Gamma^i{}_{kj}v^k\dot{x}^j\vec{e}_i$$

$$\vec{a}=\dot{v}^1\vec{e}_1+\dot{v}^2\vec{e}_2+\Gamma^1{}_{22}v^2\dot{x}^2\vec{e}_1+\Gamma^2{}_{12}v^1\dot{x}^2\vec{e}_2+\Gamma^2{}_{21}v^2\dot{x}^1\vec{e}_2$$

$$\text{d'où} \quad \vec{a}=\ddot{\rho}\vec{e}_\rho+\ddot{\theta}\vec{e}_\theta-\rho\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{\rho}\dot{\theta}\dot{\rho}\vec{e}_\theta.$$

Nous avons une nouvelle méthode qui utilise la métrique pour tenir compte des variations de la base locale à l'aide des connexions.

∘ Géodésiques

Les géodésiques sont les lignes d'univers suivies par les particules libres. Ces courbes, l'équivalent des droites d'Euclide, maximisent le temps propre.

Sur une géodésique, l'accélération propre est nulle.
Reprenons la construction de la relativité restreinte pour les référentiels non inertiels :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu d\tau^2, \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \text{et} \quad p^\mu = m u^\mu.$$

Avec la dérivée covariante, nous pouvons généraliser la loi fondamentale de la dynamique de Newton :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}_e - \vec{a}_c \quad \text{devient} \quad \frac{D\widetilde{p}}{D\tau} = \widetilde{g}$$

Équations du mouvement : $\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{g^\mu}{m} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta.$

Pour l'équation des géodésiques : $g^\mu = 0.$

Les effets métriques, équivalents des forces d'inerties classiques, s'expriment à travers les connexions, qui elles-mêmes traduisent les variations de la métrique dans un référentiel non-inertiel.

En mécanique classique : $\frac{dv^i}{dt} = \frac{F^i}{m} - \Gamma^i_{jk} v^j v^k.$

- **Limite classique**

Dans le cas classique nous constations déjà que la masse de la particule n'intervenait pas : $\vec{a} = -\vec{a}_e - \vec{a}_c$.
Pour le calcul de l'accélération $\vec{a}$ à partir de la vitesse $\vec{v}$, nous avons deux types de termes, ceux qui font intervenir la variation des seules coordonnées et les autres pour les variations de la base :

$$\vec{a} = \vec{a}_{coord} + \vec{a}_{base} \quad \text{d'où} \quad \vec{a}_{coord} = -\vec{a}_e - \vec{a}_c - \vec{a}_{base}$$

Ce sont les trois termes de droite qui s'expriment à l'aide des connexions.

Référentiel uniformément accéléré :

→ *Mécanique de Newton* :

$$\vec{a}_r = -\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -\vec{a}_{R'}(O)$$

R : fusée, $\vec{a}_{R'}(O) = \frac{d^2\overrightarrow{O'O}}{dt^2} = a\,\vec{i}$ et $\ddot{x} = -a$.

→ *Relativité restreinte* : comme démontré dans l'exercice page 243, les seuls coefficients de connexion non nuls sont $\Gamma^1{}_{00} = \frac{g'}{2}$ et $\Gamma^0{}_{10} = \Gamma^0{}_{01} = \frac{g'}{2g}$ avec $g(x) = \left(1 + \frac{a\,x}{c^2}\right)^2$. D'où :

$$\frac{du^1}{d\tau} = \frac{d^2x}{d\tau^2} = -\Gamma^1{}_{00}\,u^0\,u^0 = -\frac{a}{c^2}\left(1 + \frac{a\,x}{c^2}\right)\gamma^2 c^2 = -\gamma^2 a\left(1 + \frac{a\,x}{c^2}\right)$$

Nous retrouvons la limite classique : $\ddot{x} = -a$.

Référentiel tournant :

→ *Mécanique de Newton* : $\vec{a}_r = -\vec{a}_e - \vec{a}_c$

$$\vec{a} = \omega^2\overrightarrow{HM} - 2\vec{\omega}\wedge\vec{v} = -\omega^2\rho\,\vec{u}_\rho - 2\omega\,\vec{u}_z \wedge (\dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\,\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\,\dot{\theta})\vec{u}_\theta = \omega^2\rho\,\vec{u}_\rho - 2\,\omega\dot{\rho}\,\vec{u}_\theta + 2\,\omega\rho\,\dot{\theta}\vec{u}_\rho$$

→ *Relativité restreinte* : $\widetilde{u} = \gamma(c, \dot{\rho}, \dot{\theta}, \dot{z})$

Seules connexions non nulles :

$$\Gamma^1{}_{00} = -\frac{\rho\,\omega^2}{c^2} \qquad \Gamma^1{}_{02} = \Gamma^1{}_{20} = -\frac{\rho\,\omega}{c} \qquad \Gamma^1{}_{22} = -\rho$$

$$\Gamma^2{}_{10}=\Gamma^2{}_{01}=\frac{\omega}{\rho c}\qquad \Gamma^2{}_{12}=\Gamma^2{}_{21}=\frac{1}{\rho}$$

D'où :

$$\frac{du^1}{d\tau}\tilde{e_1}+\frac{du^2}{d\tau}\tilde{e_2}$$
$$=\left(-\Gamma^1{}_{00}u^0u^0-2\Gamma^1{}_{02}u^0u^2-\Gamma^1{}_{22}u^2u^2\right)\tilde{e_1}$$
$$+\left(-2\Gamma^2{}_{10}u^1u^0-2\Gamma^2{}_{12}u^1u^2\right)\tilde{e_2}$$

$$\frac{d\gamma\dot{\rho}}{d\tau}\tilde{e_\rho}+\frac{d\gamma\dot{\theta}}{d\tau}\tilde{e_\theta}$$
$$=\left(-\rho\omega^2\gamma^2+2\rho\omega\gamma^2v^\theta+\rho\gamma^2(v^\theta)^2\right)\tilde{e_\rho}$$
$$+\left(-2\omega\gamma^2v^\rho-2\gamma^2v^\rho v^\theta\right)\tilde{e_\theta}/\rho$$

Nous retrouvons la limite classique :

$$\ddot{\rho}\vec{u_\rho}+\ddot{\theta}\rho\vec{u_\theta}=\left(-\rho\omega^2+2\rho\omega\dot{\theta}+\rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u_\rho}+\left(-2\omega\dot{\rho}-2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{u_\theta}$$

Nous comprenons maintenant comment les particules se meuvent dans un référentiel non inertiel. La relativité restreinte nous donne un nouveau cadre interprétatif et expérimental où les effets métriques tiennent lieu et place aux forces d'inerties de l'ancien cadre newtonien.

Dans un espace-temps plat et un référentiel non-inertiel, une particule libre maximise son temps propre en suivant une trajectoire courbée.

Il ne s'agit pas simplement d'un nouveau point de vue, mais d'une généralisation aux particules de masse nulle, et, d'une correction, avec des mesures expérimentales qui s'en trouvent modifiées.

La notion classique de force est abandonnée au profit d'une description relativiste en termes de géométrie d'espace-temps. Ici, c'est le concept de force d'inertie qui devient inutile, on suit le même type de démarche en relativité générale, où la géométrie fait disparaître le concept de force de gravitation.

Pas besoin que l'espace soit courbe pour qu'une particule libre ait une trajectoire courbée.

∘ Approche lagrangienne

Les équations géodésiques se retrouvent avec les équations de Lagrange. La démarche est explicitée dans l'exercice page 160. Nous cherchons la géodésique qui extrémise le temps propre :

$$c^2\tau=\int g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu d\tau,\quad L=g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial x^\mu}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\mu}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=g_{\alpha\beta,\mu}u^\alpha u^\beta \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial u^\mu}=g_{\alpha\mu}u^\alpha+g_{\mu\beta}u^\beta$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\mu}=g_{\alpha\mu,\nu}u^\nu u^\alpha+g_{\alpha\mu}\frac{du^\alpha}{d\tau}+g_{\mu\beta,\rho}u^\rho u^\beta+g_{\mu\beta}\frac{du^\beta}{d\tau}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu}u^\alpha u^\beta-g_{\alpha\mu,\nu}u^\nu u^\alpha-g_{\mu\beta,\rho}u^\rho u^\beta-2\,g_{\mu\beta}\frac{du^\beta}{d\tau}=0$$

D'où l'équation géodésique : $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta+\frac{du^\mu}{d\tau}=0$

Conclusion et synthèse

Revenons sur la notion de référentiel d'inertie.
Nous avons une définition circulaire : les postulats sont vrais dans les référentiels d'inertie, et, un référentiel est d'inertie si les postulats y sont vérifiés.
Si dans un référentiel une particule a une trajectoire courbée, est-ce dû, à une force, ou, au caractère non-inertiel du référentiel ?
En mécanique Newtonienne, si nous connaissons au préalable la nature des forces, nous pouvons déterminer si un référentiel est galiléen. Prenons les forces électromagnétiques et de gravitation : si aucune charges et masses ne sont présentent, et que, néanmoins, la trajectoire est courbée, vous pouvez en déduire que le référentiel est non galiléen. Il faut imaginer une telle région de l'espace vide, suffisamment éloignée de toute matière pour que l'action à distance des forces soit négligeable.
Connaissez-vous le paradoxe d'Olbers ?
En cosmologie, l'univers est tel un fluide de galaxies homogène et isotrope. Vous voyez les étoiles dans la nuit noire, la clarté résultante et faible, mais en toute logique la nuit devrait être blanche. En effet, plus on s'éloigne, plus la lumière reçue par l'observateur en provenance de chaque objet lumineux est faible, mais à la fois leur nombre augmente dans les mêmes proportions. La nuit finalement est noire car l'Univers est en expansion.
Mais revenons aux référentiels, si nous appliquons le Paradoxe d'Olbers à la gravitation, nous avons le

même résultat, le champ de gravitation tendrait vers l'infini en tous points de l'Univers... Nous voulons ici illustrer à quel point les fondements de la mécanique classique ne sont pas triviaux. De plus, peut-on déterminer la nature des forces sans l'aide des lois de Newton ?

En relativité, la situation est bien plus simple, on utilise la géométrie. Le comportement de l'espace-temps permet à lui seul de déterminer si le référentiel est inertiel — sans faire appel à la notion de force. Au préalable, il suffit de disposer d'un ensemble d'horloges au repos et synchronisées sur la région que l'on étudie. Si au cours de l'expérience, les horloges ne se désynchronisent pas, le référentiel est inertiel.

Métrique de Minkowski

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Référentiel d'inertie

Métrique minkowskienne

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \quad \text{avec} \quad v_{lum} = c$$

Référentiel d'inertie / Équations de Maxwell

Espace-temps plat

Référentiel non-inertiel / Effets métriques

Fusée accélérée / Disque tournant

Tenseur de Courbure nul

Retour à la métrique de Minkowski par un changement de coordonnées

R E L A T I V I T É R E S T R E I N T E

R E L A T I V I T É G É N É R A L E

Principe d'équivalence / Équation d'Einstein

Espace-temps courbe dans le vide

Gravitation / Ondes spatio-temporelles

Tenseurs Énergie-Impulsion et de Ricci nuls

Tenseur de Courbure non nul

Espace-temps courbe

Matière / Sources du champ gravitationnel

Tenseurs Énergie-Impulsion et de Ricci non nuls

Tenseur de Courbure non nul

Exercices

1. ▲△△ Changement de base

Soit la base $\vec{e}'_\mu$ du référentiel inertiel.

1 - Déterminer la base $\vec{e}_\mu$ du référentiel uniformément accéléré de la fusée en fonction de $\vec{e}'_\mu$.
Placez sur un diagramme de Minkowski quelques représentants de cette base.

2 - Déterminer la base $\vec{e}_\mu$ du référentiel du disque en rotation uniforme en fonction de $\vec{e}'_\mu$.
Représentez cette base sur un diagramme de Minkowski.

Correction p409

2. ▲▲▲ Tenseur de courbure de Riemann

Nous donnons ici le tenseur de courbure sans justifications. Nous allons appliquer les formules afin de montrer que pour la fusée accélérée, tout comme pour le disque en rotation, nous sommes en espace-temps plat en dépit du caractère non-inertiel des référentiels. Si toutes les composantes du tenseur sont nulles l'espace-temps est plat, si, ne serait-ce qu'une des composantes, est non-nulle l'espace-temps est courbe.
Tenseur de Riemann en fonction des coefficients de connexion :

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\delta}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\gamma}$$

Coefficients de connexion[35] :

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\partial_{\mu} g_{\beta\nu} + \partial_{\nu} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}\right)$$

Notation : $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} = {}_{,\mu}$ ainsi $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta,\gamma} = \partial_{\gamma}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta}$.

Le tenseur de courbure est antisymétrique sur ses deux derniers indices. Le coefficient de connexion est symétrique sur ses deux derniers indices.

1 - Fusée : référentiel uniformément accéléré

a- Déterminer $g_{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu}$.

b- Déterminer l'ensemble des coefficients de connexions. Vous devez identifier les coefficients non nuls pour le calcul de la courbure.

Aides : vous pouvez poser $g(x) = \left(1 + \frac{ax}{c^2}\right)^2$.

S'aider au maximum des symétries. Bien identifier les termes non nuls de $g_{\mu\nu}$ *et* $g^{\mu\nu}$. *Sont-ils constants ? De quelles coordonnées dépendent-ils ? Quels termes* $\partial_{\mu} g_{\beta\nu}$ *sont non nuls ?*

c- Montrez que toutes les composantes du tenseur de courbure sont nulles.

Aide : quelle est la conséquence de l'antisymétrie ?

2 - Disque : référentiel en rotation uniforme.

a- Déterminer $g_{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu}$.

35 Aussi appelés symboles de Christoffel.

b- Déterminer l'ensemble des coefficients de connexions.

c- Montrez que toutes les composantes du tenseur de courbure sont nulles.

3 - Astre sphérique : référentiel de Schwarzschild.
Pour comparer avec une situation où l'espace-temps est courbe.

Nous vous invitons à poser $g=1-\frac{r_S}{r}=e^f$.

a- Déterminer $g_{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu}$.

b- Déterminer l'ensemble des coefficients de connexions non nuls.

c- Pour montrer que l'espace-temps est courbe calculez la composante $R^0{}_{101}$.

Montrez que $R_{0101}=\frac{r_S}{r^3}$. *Corr. p412*

3. ▲▲▲ Disque en rotation non uniforme

Dans l'exercice précédent nous avons montré que le tenseur de courbure était nul dans le référentiel tournant du disque en rotation uniforme. Nous allons poursuivre la démonstration dans le cas d'un mouvement de rotation quelconque du disque. Nous avions pour l'observateur inertiel en fonction des coordonnées de l'observateur au repos par rapport au disque : $\theta'=\theta+\omega t$. Nous prenons maintenant l'expression générale : $\theta'=\theta+\lambda(t)$, où

$\lambda(t)$ est une fonction quelconque du temps. Ainsi sont incluses les éventuelles phases d'accélération, de décélération, d'oscillations, etc.

1 - Déterminer les coefficients de connexion.

2 - Calculer le tenseur de courbure de Riemann.

3 - Le résultat était-il attendu ?

Correction p417

4. ▲▲▲ Courbures spatiales

Le tenseur de courbure de Riemann s'applique à tout espace, espace-temps et sous-espace quel que soit le nombre de dimensions. Nous avons calculé la courbure d'espace-temps à 4 dimensions et nous allons calculer les courbures pour les parties spatiales. Nous reprenons les trois exemples du référentiel uniformément accéléré, du référentiel de Schwarzschild et de celui en rotation uniforme.

Détaillons la méthode et expliquons l'approche générale pour mesurer les temps et les distances[36].

Pour le temps, nous déterminons l'intervalle de temps propre $d\tau$ en posant les $dx^i=0$ (i=1, 2 ou 3) :

$$d\tau=\frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0 \quad \text{et} \quad \tau=\frac{1}{c}\int\sqrt{g_{00}}\,dx^0 \quad (x^0=ct)$$

Pour l'espace, si le référentiel est synchrone, $g_{0i}=0$:

$$ds^2=g_{00}\,c^2dt^2-dl^2 \quad \text{avec} \quad dl^2=-g_{ij}dx^i\,dx^j=\gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j$$

On calcule alors le tenseur de courbure avec le tenseur métrique tridimensionnel γ_{ij} comme on l'a

36 Landau / Lifchitz, *Théo. des champs*, *§ Distances et interval. de tps*.

fait auparavant. Ici, nous faisons courir les indices de 1 à 3.

Si le référentiel n'est pas synchrone, la coordonnée temporelle n'est pas directement séparée des coordonnées spatiales, et, on montre que :

$$\gamma_{ij} = -g_{ij} + \frac{g_{0i}\,g_{0j}}{g_{00}} \qquad \text{et} \qquad dl^2 = \gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j$$

Nous pouvons alors calculer *dl* avec le tenseur métrique tridimensionnel. Par contre, on ne peut, en général, déterminer la distance entre deux corps. Le tenseur de courbure ne peut, aussi, être directement calculé sous la forme précédemment donnée[37]. Néanmoins, dans le cas particulier où le référentiel est stationnaire, coefficients métriques $g_{\mu\nu}$ indépendants du temps, nous pouvons intégrer l'élément *dl* et le tenseur de courbure a la forme habituelle :

Référentiel stationnaire : $\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0, \quad l = \int dl$ et $R^i{}_{jkl}$.

1 - Fusée : Le référentiel est-il synchrone ?
L'espace est-il courbe ?

2 - Astre sphérique : Le référentiel est-il synchrone ?
L'espace est-il courbe ?

3 - Disque :

a- Le référentiel est-il synchrone ?

b- Déterminez γ_{ij}.

c- Le référentiel est-il stationnaire ? Que vaut

37 Technique de projection de Cattaneo.
Rizzi / Ruggiero, *Space geometry of rotating platforms*, 2008.

le rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre ? (cercle centré sur l'axe de rotation)
L'observateur lié au disque tournant expérimente-t-il une courbure ?

d- Calculez $R^{i}{}_{jkl}$.

e- On montre que, pour un espace à deux dimensions, il n'existe qu'une seule composante indépendante du tenseur de courbure R_{ijkl} (i=1, 2)[38].

Calculez la courbure gaussienne K de la surface :

$$K=\frac{1}{R_1 R_2}=\frac{R_{1212}}{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbures en un point du disque. Vous pourrez comparer à la courbure gaussienne d'une sphère.

Correction p419

5.+ ▲△△ Création de paires

Une particule de haute énergie peut sous certaines conditions créer une paire particule-antiparticule. Prenons l'exemple de la collision de deux protons. Dans le référentiel barycentrique ceux-ci arrivent face-à-face avec la même vitesse. Quand leur énergie cinétique est tout juste suffisante, on dit *au seuil*, ils créent alors quatre particules au repos :

$$p+p \rightarrow p+p+p+\bar{p}$$

38 Landau, page 342, *§ Propriétés du tenseur de courbure*.

Tracez le diagramme de Minkowski au seuil dans le référentiel barycentrique où $\sum \vec{p}_i = \vec{0}$.

Corr. p422.

6. ▲▲▲ Équation de propagation

L'équation d'onde, appelée équation de d'Alembert, décrit le comportement d'une multitude d'ondes : les vagues, les ondes sonores, les ondes sismiques, les ondes électromagnétiques, etc. Ces ondes, bien que de natures physiques différentes, obéissent toutes à la même équation. L'amplitude de l'onde $\varphi(\vec{r},t)$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \Box\varphi = 0$$

c est la célérité de l'onde qui dépend du type d'onde et du milieu.

Définition du Laplacien en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Alembertien : $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

1 - Montrez que l'équation de propagation n'est pas invariante sous la transformation de Galilée.

Aide: En mécanique classique, l'amplitude de l'onde est une grandeur physique qui ne doit pas dépendre du système de coordonnées choisi. En un point M et à un instant donné : $\varphi'(x',t')=\varphi(x,t)$. *Comme, par exemple, la hauteur des vagues, ou la surpression sonore. Par identification de* $d\varphi$ *et* $d\varphi'$ *déduire les relations entre les dérivées partielles.*

2 - Montrez que l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide est invariante sous la transformation de Lorentz : $\Box\vec{E}=0$ et $\Box\vec{B}=0$. Dans ce cas l'amplitude de l'onde dépend du référentiel, les formules de transformation sont données page 427.

Correction p422.

7. ▲▲△ Équation de Schrödinger

En physique quantique, la fonction d'onde obéit à l'équation d'évolution suivante :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+V\Psi$$

La densité de probabilité de présence d'une particule s'obtient en multipliant la fonction d'onde par son complexe conjugué :

$$\rho=\frac{dP}{dV}=\Psi\Psi^*$$

Nous pourrons nous limiter au mouvement à une dimension d'une particule libre de masse *m* :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2},$$

et une transformation spéciale de Galilée : $\vec{v}_{R'/R}=v\,\vec{i}$

1 - La probabilité de présence d'une particule dans un volume donné ne doit pas dépendre du référentiel. Par contre la fonction d'onde n'est pas unique et la densité de probabilité n'est pas modifiée si nous multiplions la fonction d'onde par un nombre complexe de module un.
Montrez que l'équation de Schrödinger est invariante sous la transformation de Galilée avec :

$$\Psi'=e^{\frac{i}{\hbar}(Et-px)}\Psi \quad \text{où} \quad E=\frac{1}{2}mv^2 \quad \text{et} \quad p=mv.$$

2 - Montrez pourquoi l'équation de Schrödinger ne peut être invariante sous la transformation de Lorentz.

Correction p424.

8. ▲▲▲ Le champ électromagnétique

Les champs électrique et magnétique ne s'écrivent pas comme des quadrivecteurs mais comme les composantes d'un tenseur d'ordre 2 :

$$\boldsymbol{F}=F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne forment en fait qu'une seule et unique entité physique et leurs composantes dépendent du référentiel d'inertie d'observation. Nous sommes ici dans le référentiel inertiel *R,* et nous considérerons aussi le référentiel *R'* en translation rectiligne uniforme selon *x* : $\vec{v}_{R'/R}=\vec{v}=v\,\vec{u}_x$.

Le tenseur du champ électromagnétique est antisymétrique : $F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$.

1 - Tout comme la masse, la charge électrique est un attribut de la particule qui ne dépend pas du référentiel. Nous pouvons simplement construire un quadrivecteur pour la charge et son mouvement :

$$\widetilde{j}=q\,\widetilde{u} \qquad \text{(4-vecteur courant)}$$

Nous allons montrer que le 4-vecteur $\boldsymbol{F}\,\widetilde{j}$ s'identifie à la 4-force électromagnétique :

$\frac{d\,\tilde{p}}{d\,\tau}=\boldsymbol{F}\,\tilde{j}$ et pour les composantes $\frac{d\,p^{\mu}}{d\,\tau}=F^{\mu\nu}\,j_{\nu}$

En développant les composantes, temporelle puis spatiales, montrez que l'on retrouve la puissance électromagnétique, puis l'expression de la force de Lorentz.

2 - Donner l'expression des composantes de $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ dans le référentiel *R'* en fonction de celles de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ du référentiel *R*.

3 - Déterminez les composantes du tenseur $F_{\mu\nu}$.

4 - Trouvez l'expression des deux invariants de Lorentz. Ce sont des invariants scalaires fonctions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Le premier s'obtient en contractant toutes des composantes du tenseur électromagnétique en le multipliant avec lui-même : $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Le second utilise le 4-tenseur unitaire de quatrième ordre parfaitement antisymétrique : $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$. $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ est nul si deux indices sont égaux et vaut ±1 sinon. Les composantes changent de signe lorsqu'on permute deux indices. Nous posons $\epsilon^{0123}=1$.

5 - Dans le référentiel du laboratoire *R*, nous avons deux plaques planes distantes de *e* et de charges surfacique respectives σ et -σ. Les armatures du condensateur sont supposées infinie et nous prendrons l'axe des *z* de la plaque négative vers la plaque positive. Nous allons utiliser les théorèmes de Gauss et d'Ampère :

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS}=\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \qquad \oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl}=\mu_0 I_{enl} \qquad (\epsilon_0\mu_0 c^2=1)$$

L'utilisation de ces outils n'est pas expliquée ici. Un livre en soi sur ce sujet serait nécessaire. Se référer à un cours niveau licence sur l'électrostatique et la magnétostatique.

a- Déterminez le champ électrique en tout point de l'espace. Écrire la matrice $F^{\mu\nu}$ dans *R*.

b- Nous nous plaçons maintenant dans le référentiel *R'* en translation rectiligne uniforme selon l'axe des *x* à la vitesse $\vec{v}$. Pour un observateur classique de ce référentiel la densité de charges reste la même sur les plaques et le champ électrique $\vec{E}'=\vec{E}$. Par contre comme les charges sont en mouvement une densité de courant surfacique apparaît : déterminez le champ magnétique en tout point. Écrire la matrice $F'^{\mu\nu}$ dans *R'*.

c- Partant du tenseur $F^{\mu\nu}$ retrouvez-vous $F'^{\mu\nu}$ par changement de référentiel avec les matrices lambda ? Avons-nous bien invariance des invariants de Lorentz ?

6 - Dans le référentiel du laboratoire *R*, nous avons un faisceau homocinétique de protons de vitesse $\vec{v}$, de rayon *r* et de densité *n*. Nous nommons *R'* le référentiel propre des protons.

a- Déterminez le champ électrique à l'extérieur du faisceau dans *R'*.

b- Par des considérations générales, déterminez la structure de ce même champ dans *R* avec peu de calculs. *Corr. p425.*

9. ▲▲▲ Les équations de Maxwell

James Clerk Maxwell établit en 1864 la théorie de l'électromagnétisme qui unifie la théorie de l'électricité de Michael Faraday et la théorie du magnétisme de André-Marie Ampère à travers les équations suivantes :

Dans le vide :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Avec sources :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Les champs dérivent d'un potentiel V et d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ selon :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Condition de Lorentz : $\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

Conservation de la charge : $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Définition des opérateurs en coordonnées cartésiennes :

Gradient de f : $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

Divergence de $\vec{C}$: $\vec{\nabla}\cdot\vec{C} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}$

Rotationnel de $\vec{C}$:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

1 - Transformation de Galilée :

a- Montrez que la deuxième loi de Newton est invariante sous la transformation de Galilée.

b- La force de Lorentz est considérée invariante sous cette même transformation. En déduire les lois de transformation galiléenne de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en fonction de la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e = \vec{v}_{R'/R}$. Vérifiez qu'elles correspondent bien à la limite non relativiste de la transformation de Lorentz de ces mêmes champs.

c- Montrez que les deux premières équations de Maxwell $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ et $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ restent invariantes sous une transformation de Galilée.

Aide pour faire les calculs sous forme vectorielle :

Dérivées partielles : $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}'$ *et* $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{v}_e\cdot\vec{\nabla}'$

Formule utile :

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}.$$

d- Montrer que les deux équations de Maxwell suivantes ne sont pas invariantes sous une transformation de Galilée (pour simplifier les calculs, on pourra considérer le cas sans les sources ρ et $\vec{j}$).

Formule utile : $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})-\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})$.

2 - Transformation de Lorentz : Montrons qu'à partir de 1905 les équations de Maxwell pouvaient incorporer leur cadre relativiste naturel.

a- Montrez que les équations de Maxwell sont invariantes sous la transformation de Lorentz.

b- Nous introduisons le 4-vecteur densité de courant $\widetilde{j}=\rho_p\widetilde{u}$ où ρ_p est la densité volumique de charges dans le référentiel propre. Montrez qu'en utilisant le 4-vecteur gradient $\partial_\mu=\widetilde{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial ct},\vec{\nabla}\right)$ nous obtenons une équation de conservation de la charge sous forme covariante.

c- Nous proposons d'introduire le 4-vecteur potentiel $\widetilde{A}=(V/c,\vec{A})$. Montrez que la condition de Lorentz s'écrit simplement sous forme tensorielle avec A^μ et le 4-vecteur gradient ∂_μ. Montrez, qu'en combinant judicieusement les quadrivecteurs A^α et ∂^β, nous obtenons le tenseur $F^{\mu\nu}$.

d- Montrez que l'équation covariante $\partial_\mu F^{\mu\nu}=\mu_0 j^\nu$ redonne les équations de Maxwell avec sources.

e- Montrez que l'équation $\partial^\alpha F^{\mu\nu}+\partial^\mu F^{\nu\alpha}+\partial^\nu F^{\alpha\mu}=0$ redonne les deux premières équations de Maxwell.

f- Trouvez l'expression des équations de propagation de V et $\vec{A}$.

3 - Montrez que les champs ne sont pas modifiés par le changement de jauge suivant :

$$\forall f \quad \begin{cases} V' = V - \dfrac{\partial f}{\partial t} \\ \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \end{cases}$$

C'est ce qu'on appelle l'*invariance de jauge*. La condition de Lorentz correspond à un choix de jauge particulier qui donne aux équations de propagation des potentiels une forme plus simple. Et surtout, A^μ se comporte alors comme un 4-vecteur, et, l'invariance des équations de Maxwell en devient immédiate.

Correction p431.

Tome XVI. Samedi 2 Juillet 1898 5e Année. — N° 27.

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE D'ÉLECTRICITÉ

CHAMP ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE

PRODUIT PAR UNE CHARGE ÉLECTRIQUE CONCENTRÉE EN UN POINT ET ANIMÉE D'UN MOUVEMENT QUELCONQUE

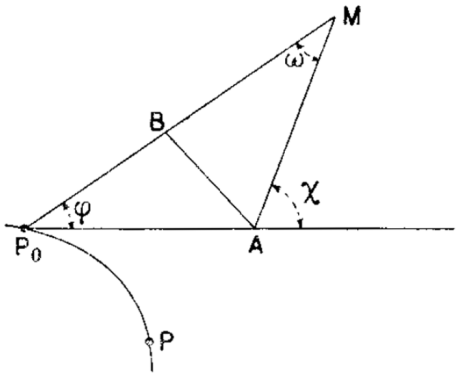


Fig. 2.

A. Liénard,
Professeur à l'École des Mines
de Saint-Etienne.

INTERACTIONS

Nous étudions l'interaction de deux particules chargées. Nous voulons tracer le diagramme de Minkowski de deux électrons qui se repoussent. Pour cela, nous nous placerons dans le référentiel barycentrique. Les éléments d'électromagnétisme traités dans les exercices *Le champ électromagnétique* page 252 et *Les équations de Maxwell* page 255, sont supposés acquis.

CHAMP CRÉÉ PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

Une particule de charge *q* est au repos en P, origine d'un référentiel d'inertie *R'*. Nous y observons le champ statique créé en un point donné M :

$$\vec{r}\,' = (\overrightarrow{PM})_{R'} \qquad \vec{E}\,' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\,'}{r'^3} \qquad \vec{B}\,' = \vec{0}$$

Nous nous plaçons maintenant dans un référentiel *R* d'inertie quelconque, d'origine O et en translation rectiligne et uniforme par rapport à *R'* : $\vec{v}_{R'/R} = \vec{v}$. La particule est en mouvement dans *R* et passe par O à t=0. Nous voulons obtenir l'expression des champs en M dans ce nouveau référentiel *R*. Nous appliquons la transformée de Lorentz et la transformation des champs[39] :

$$(\overrightarrow{PM})_{R'} = (x', y', z') = (\gamma(x - \beta ct), y, z) \quad \text{avec} \quad \vec{v} = v\vec{i}$$

$$\vec{r} = (\overrightarrow{PM})_R = (\overrightarrow{PO})_R + (\overrightarrow{OM})_R = (\overrightarrow{OM})_R - \vec{v}\,t = (x - vt, y, z)$$

$$r'^2 = \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2[r^2 - (y^2 + z^2)\beta^2] = r^2\gamma^2(1 - \beta^2\sin^2\theta)$$

avec $\theta = (\vec{v}, \vec{r})$. De plus $\vec{E} = (E'_{x'}, \gamma E'_{y'}, \gamma E'_{z'})$ d'où :

39 Lumbroso, *Interaction de deux particules chargées*.

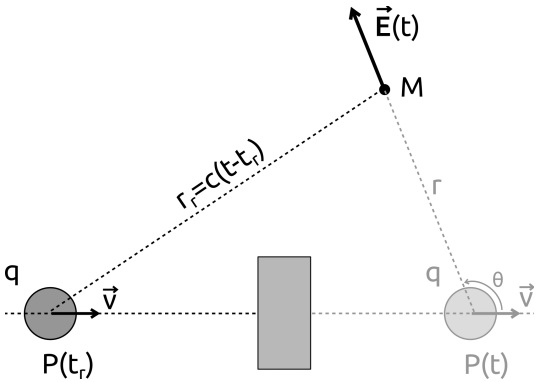
$$\vec{E}=\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

aussi $$\vec{B}=\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}\frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{\vec{v}\wedge\vec{r}}{r^3}=\frac{\vec{v}\wedge\vec{E}}{c^2}$$

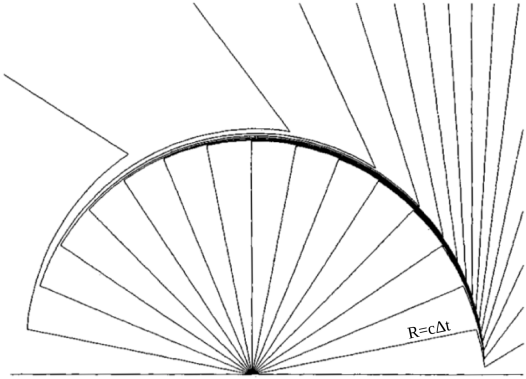
Nous obtenons les expressions relativistes des lois de Coulomb et de Biot et Savart pour des particules chargées non accélérées.

Le champ électrique semble toujours radial, mais avec une distribution angulaire non isotrope. En fait la situation est plus complexe, car le signal se propage maintenant à vitesse finie, et ce champ n'a pas été généré par la particule à t=0 en O, mais à une position antérieure. L'événement correspondant est à l'intersection du cône passé de *M(t=0)* avec la ligne d'univers de la particule.

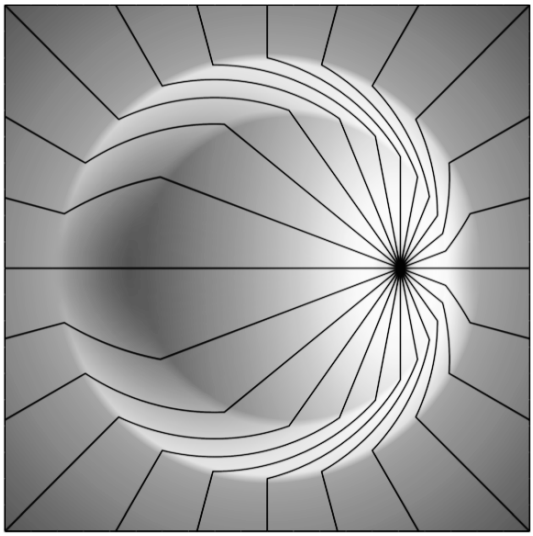
Dans les formules précédentes les champs à l'instant t s'expriment à l'aide de quantités elles-mêmes fonction de t, alors qu'il serait judicieux qu'elles s'expriment en fonction du temps retardé t_r.



Champ électrique d'une charge positive en mouvement rectiligne et uniforme. Même si un obstacle s'interpose sur la trajectoire entre P_r et P, un champ radial par rapport à P sera bien présent à t en M. Pourtant la charge ne sera jamais en P. Tout se passe comme si le champ anticipait un mouvement rectiligne et uniforme de la charge (Livre de Boratav et Kerner).



Lignes de champ électrique d'une charge qui, vient d'abord depuis la gauche à 95 % de c, puis s'arrête brusquement en O à t=0. Carte des lignes de champs dans le référentiel d'observation en t=Δt [40].



Lignes et intensités du champ. La particule d'abord au repos, commence ensuite à accélérer uniformément, puis continue à la vitesse constante c/√2 (facteur longitudinal 1-β²). Le champ électrique diminue selon la direction du mouvement et augmente en transverse [41].

---

40 *Picture of Dynamic Electric Fields*, Tsien, American J. of P., 1972.

41 *Electric field lines of relativistically moving point charges*, Daja Ruhlandt, Steffen Mühle et Jörg Enderlein, 2019.

Nous donnons l'expression générale des champs électromagnétiques, en fonction de t_r, pour un mouvement quelconque de la charge[42]. Cette formule a été établie pour la première fois en 1898 par Alfred-Marie Liénard[43]. Nous pourrions nous étonner que cette expression relativiste des champs ait été exprimée avant même que la relativité restreinte ne soit mise à jour en 1905. En fait, il n'y a rien d'anachronique, car Liénard s'appuie sur les équations de Maxwell, qui, comme on le concevra ultérieurement, sont purement relativistes.

$$\vec{E}(M,t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1-\beta^2}{r^2}\frac{\vec{e}-\vec{\beta}}{(1-\vec{e}\cdot\vec{\beta})^3}+\frac{\vec{e}\wedge[(\vec{e}-\vec{\beta})\wedge\dot{\vec{\beta}}]}{r(1-\vec{e}\cdot\vec{\beta})^3}\right]_{P_r}$$

$$\vec{B}(M,t)=\frac{\vec{e}_{P_r}\wedge\vec{E}}{c} \qquad \vec{r}=(\overrightarrow{PM})_R \qquad \vec{e}=\frac{\vec{r}}{r}$$

$\vec{\beta}=\vec{v}_R/c$ et $\dot{\vec{\beta}}$ sont la vitesse et l'accélération instantanées. $\vec{e}$ est le vecteur unitaire dirigé depuis la charge en P jusqu'au point d'observation M.

La date t_r vérifie $c(t-t_r)=r_{P_r}$.

Le premier terme en $1/r^2$ ne dépend que de la vitesse de la particule et correspond à celui trouvé pour la charge statique. Ici, le référentiel propre R' de la particule chargée n'est plus inertiel et l'accélération propre est non nulle. Un second terme qui dépend de l'accélération apparaît, c'est un terme en $1/r$, radiatif : Une charge accélérée émet un rayonnement électromagnétique.

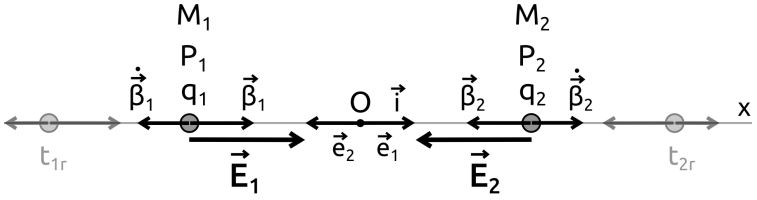
Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont toujours orthogonaux.

---

42 Landau, *Potentiels de Liénard-Wiechert*. Aussi : Jackson, *Classical Electrodynamics*, 1962, 641 pages, équation (14.14).

43 A. Liénard, *Champ électrique et magnétique produit par une charge électrique concentrée en un point et animée d'un mouvement quelconque*, L'Éclairage Électrique, 2 juillet 1898. Expressions également établies, de façon indépendante et deux ans plus tard, par le géophysicien Emil Johann Wiechert.

Pour les deux électrons qui arrivent face à face :



Les mouvements à une dimension et la symétrie centrale simplifient la résolution. Pour alléger, toutes les quantités retardées n'ont pas été reproduites en grisé, seules les grandeurs à l'instant t sont placées en noir. Tous les vecteurs sont selon l'axe et le terme radiatif est donc nul sur l'axe : $(\vec{e}-\vec{\beta})\wedge\dot{\vec{\beta}}=\vec{0}$. Ici, les vecteurs unitaires $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ ne dépendent pas du temps : $\vec{e_1}=\vec{i}=-\vec{e_2}$. Aussi, à un instant donné, les vitesses et accélérations selon les indices 1 ou 2 sont de sens opposés et ont les mêmes valeurs en norme : $\beta_i=\dot{x}_i/c$, à l'aller $\beta_2<0$.

Pour M=M_1 et P=M_2 : $\vec{r}_r=\left(\overrightarrow{P_r\,\vec{M}}\right)_R$

$$E_{xM}(x_M,t)=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x_M-x_{P_r})^2}\frac{1-\beta_{P_r}}{1+\beta_{P_r}}$$

$$E_{y1}=0 \qquad E_{z1}=0 \qquad \vec{B}_{1axe}=\vec{0}$$

Nous avions un facteur longitudinal instantané $(1-\beta^2)$ qui ne dépendait par du sens de la vitesse, comme pour la contraction de Lorentz. Ici, ce n'est plus le cas avec le facteur longitudinal retardé $(1\pm\beta)/(1\mp\beta)$, comme pour l'effet Doppler qui tient compte du sens et du délai de propagation.

◦ **Forces entre deux charges**

Deux charges se meuvent dans *R* avec des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. La force électromagnétique $\vec{f}_1$ exercée par P_2 sur M_1 s'exprime à l'aide de la force de Lorentz :

$$\vec{f}_1 = q_1(\vec{E}_2 + \vec{v}_1 \wedge \vec{B}_2)$$

Pour la translation rectiligne et uniforme :

$$\vec{f}_1 = q_1\left[\vec{E}_2\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right) + \vec{v}_2 \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{E}_2}{c^2}\right]_t$$

Comme il se doit, le principe classique de l'action et de la réaction n'est plus vérifié. Ce principe supposait la simultanéité et une action instantanée des interactions.

Pour nos deux électrons en choc frontal :

$$\vec{f}_1(x_{1,}t) = q_1 E_{x1}(x_{1,}t)\vec{i} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x_1 - x_{2r})^2}\frac{1-\beta_{2r}}{1+\beta_{2r}}\vec{i}$$

∞ RAYONNEMENT D'UNE CHARGE

Une charge accélérée émet un rayonnement électromagnétique.

◦ **Puissance rayonnée**

Énergie émise par unités de temps dans le référentiel propre de la particule :

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}a^2$$

Quand le référentiel propre est non-inertiel la particule, immobile et d'accélération propre a_p, rayonne. Le rayonnement est ici intégré sur toutes les directions et

fréquences. Pour des particules non-relativistes, c'est la *formule de Larmor* établie en 1897, valable alors pour une particule en mouvement quelconque dans le référentiel d'étude. Ce rayonnement rend l'atome dans le cadre du modèle planétaire de Rutherford instable. En effet, dans ce modèle, l'électron rayonne jusqu'à s'écraser sur le noyau[44].

Pour un mouvement relativiste quelconque d'une particule chargée dans un référentiel d'inertie[45] :

$$P=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{2e^2}{3c^3}\ \frac{a^2-\frac{(\vec{v}\wedge\vec{a})^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}$$

Cette puissance rayonnée freine la particule. Cependant, elle n'est pas simplement égale à la puissance cinétique, car la particule ne constitue pas un système isolé et elle interagit avec d'autres charges. La particule est soumise à la force de freinage et à la force de Lorentz. Par contre, pour ne pas avoir à tenir compte de l'énergie d'interaction, nous pouvons calculer l'énergie du système quand tous ses constituants sont à grande distance les uns des autres. Par exemple, pour la diffusion de deux électrons, la différence d'énergie cinétique avant et après le choc correspond à l'énergie rayonnée.

- **Force de freinage**

Nous devons compléter l'équation du mouvement d'une charge en ajoutant le freinage par émission $\widetilde{g}$:

$$\frac{d\widetilde{p}}{d\tau}=\boldsymbol{F}\,\widetilde{j}+\widetilde{g}$$

44 D'où l'abandon de l'approche classique pour la physique quantique. Le terme *classique* peut signifier non-relativiste ou non-quantique.

45 Landau, *Rayonnement d'une charge animée d'un mouvement rapide*.

Expression covariante de la quadriforce de freinage[46] :

$$g^{\mu}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{dw^{\mu}}{d\tau}-\frac{u^{\mu}u^{\nu}}{c^2}\frac{dw_{\nu}}{d\tau}\right)$$

∞ Les potentiels retardés

Les formules pour les champs sont déduites des potentiels :

$$V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\frac{1}{(1-\vec{e}\cdot\vec{\beta})}\right]_{ret} \quad \text{et} \quad \vec{A}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\vec{\beta}}{(1-\vec{e}\cdot\vec{\beta})}\right]_{ret}$$

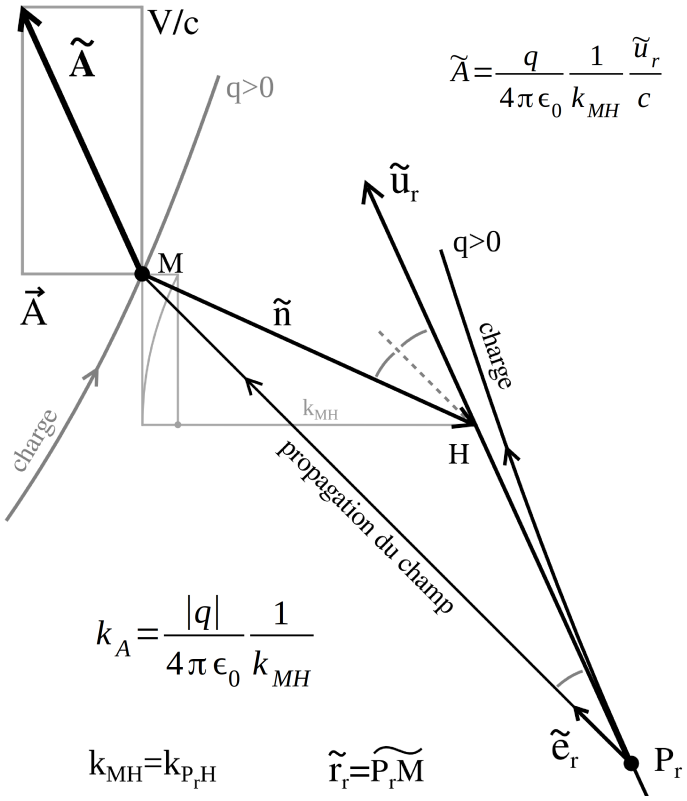
$$\Rightarrow \quad \widetilde{A}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\widetilde{u}}{\widetilde{r}\cdot\widetilde{u}}\right]_{ret} \text{ avec } \widetilde{r}=r(1,\vec{e})=(r,\vec{r}) \text{ et } \widetilde{r}\cdot\widetilde{u}>0$$

Le quadri-potentiel s'exprime à l'aide de grandeurs covariantes, il est donc bien un quadrivecteur. Le quadripotentiel $\widetilde{A}$ en M est colinéaire à la quadrivitesse retardée $\widetilde{u}_{ret}$ en $\mathrm{P_r}$. $\widetilde{A}$ est donc de genre temps, il pointe vers le futur pour une particule de charge électrique positive, et vers le passé pour une charge négative.

Pour une distribution de charges en mouvements quelconques aux positions retardées $\mathrm{P_i}$, le quadripotentiel total en M sera la somme des quadripotentiels individuels. Le quadripotentiel créé par une distribution de charges est donc aussi de genre temps.

46 Landau § *Freinage par émission d'un rayonnement dans le cas relat.*

- **Construction géométrique du 4-potentiel**



Considérons les lignes d'univers de deux particules chargées. Nous cherchons le champ créé sur une particule en M par une seconde en P. Nous avons tracé le diagramme de Minkowski dans un référentiel d'inertie. Comme le champ se propage à la vitesse finie *c*, l'événement P est antérieur sur le cône passé de M. Nous obtenons H par projection orthogonale de M sur la quadrivitesse retardée. L'intensité de $\tilde{A}$ en M est égale à l'inverse de l'intensité de $\widetilde{HM}$ multipliée par $|q|/4\pi\varepsilon_0$.

Cette propriété se lit directement sur le graphique :

$$\widetilde{r}\cdot\widetilde{u}=\left(\widetilde{n}+\widetilde{HP}\right)\cdot\widetilde{u}=k_{HP}\,k_u=k_{MH}\,c$$

Les intensités de $\widetilde{HP}$ et $\widetilde{MH}$ sont égales, car ces deux vecteurs pointent sur des hyperboles de mêmes paramètres (rotation de 90° pour passer d'une hyperbole à l'autre).

Les projections de $\widetilde{A}$ selon les axes du référentiel d'étude fournissent le potentiel *V* et le potentiel vecteur $\vec{A}$. Les variations spatiales et temporelles de ces deux grandeurs déterminent ensuite les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Il est donc clair qu'en projetant selon les axes d'un autre référentiel inertiel, nous aurions d'autres valeurs pour les champs électriques et magnétiques. Les intensités des champs changent, alors que celle du quadripotentiel reste la même.

Cas attractif.
Des charges de signes opposés,
d'abord au repos, se rapprochent ensuite.

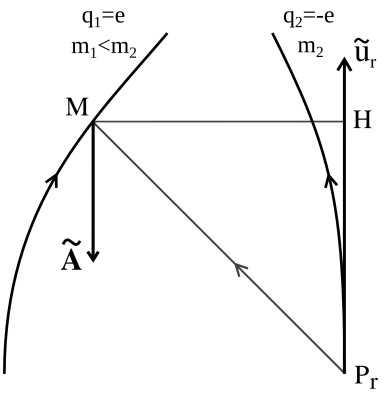
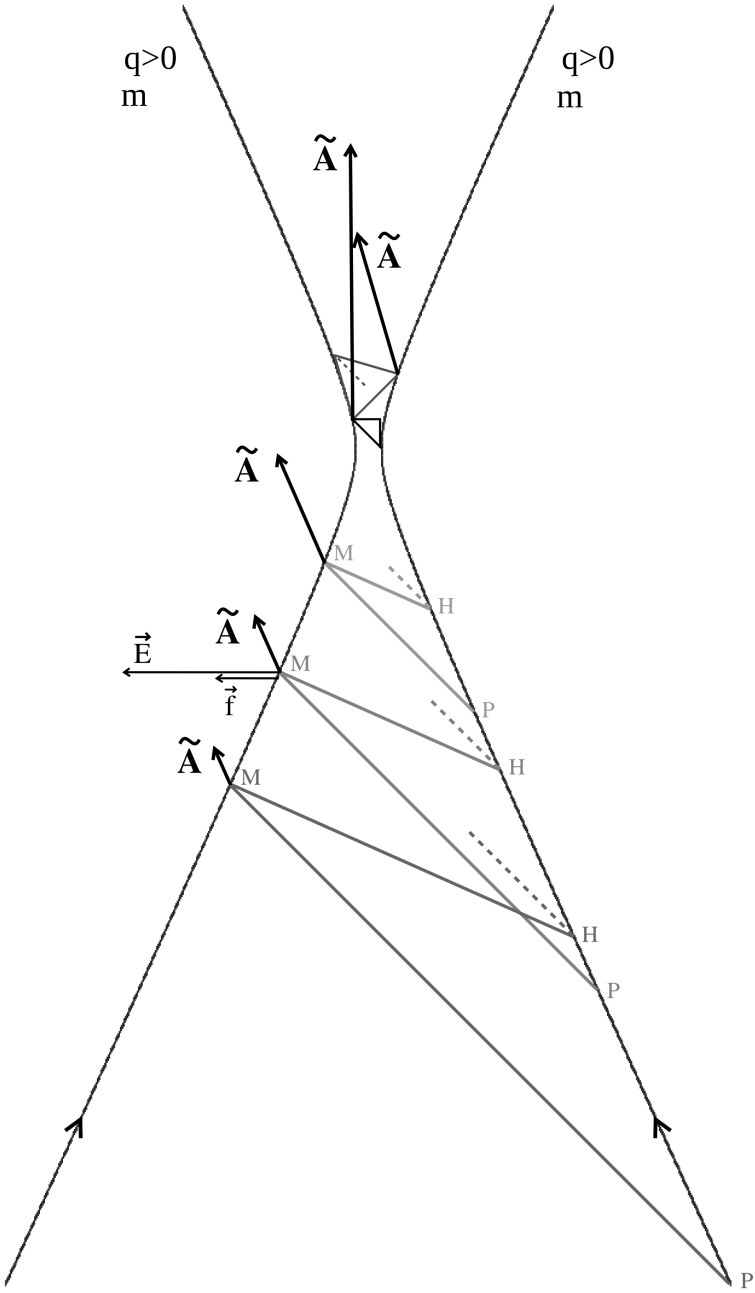


Diagramme de Minkowski d'une collision :



Exercices

1. ▲△△ Unités

Nous avons parfois besoin de passer d'un système d'unités à l'autre. Nous avons dans les ouvrages des équations où c=1, ou des anciens systèmes d'unités avec des $1/4\pi\varepsilon_0$ qui ont disparu.
Nous voulons les expressions dans le nouveau système international approuvé en 1946 (SI MKSA : m-kg-s-A).

Nous trouvons dans un livre l'expression de la puissance rayonnée *P* par une charge *e* d'accélération *a* :

$$P=\frac{2e^2}{3c^3}a^2$$

Rétablir si besoin les unités SI.

Correction page 439

2. ▲▲△ Équation du mouvement relativiste

Nous considérons le mouvement à une dimension cartésienne dans un référentiel d'inertie.

En mécanique classique nous avons : $a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{F_x}{m}$.

Quelle relation avons-nous en relativité restreinte entre a_x et f_x ?

Notations : $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ *et* $\vec{f}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ *avec* $\vec{p}$ *l'impulsion.*

Correction page 439

3. ▲▲▲ Quadriforce de freinage

Propriétés de la force de freinage $\widetilde{g}$.

1- Montrez que $\widetilde{g}\cdot\widetilde{u}=0$.

2- Pour un mouvement rectiligne selon *x*, déterminez l'expression de *g* en fonction de *v, a* et *da/dt*.

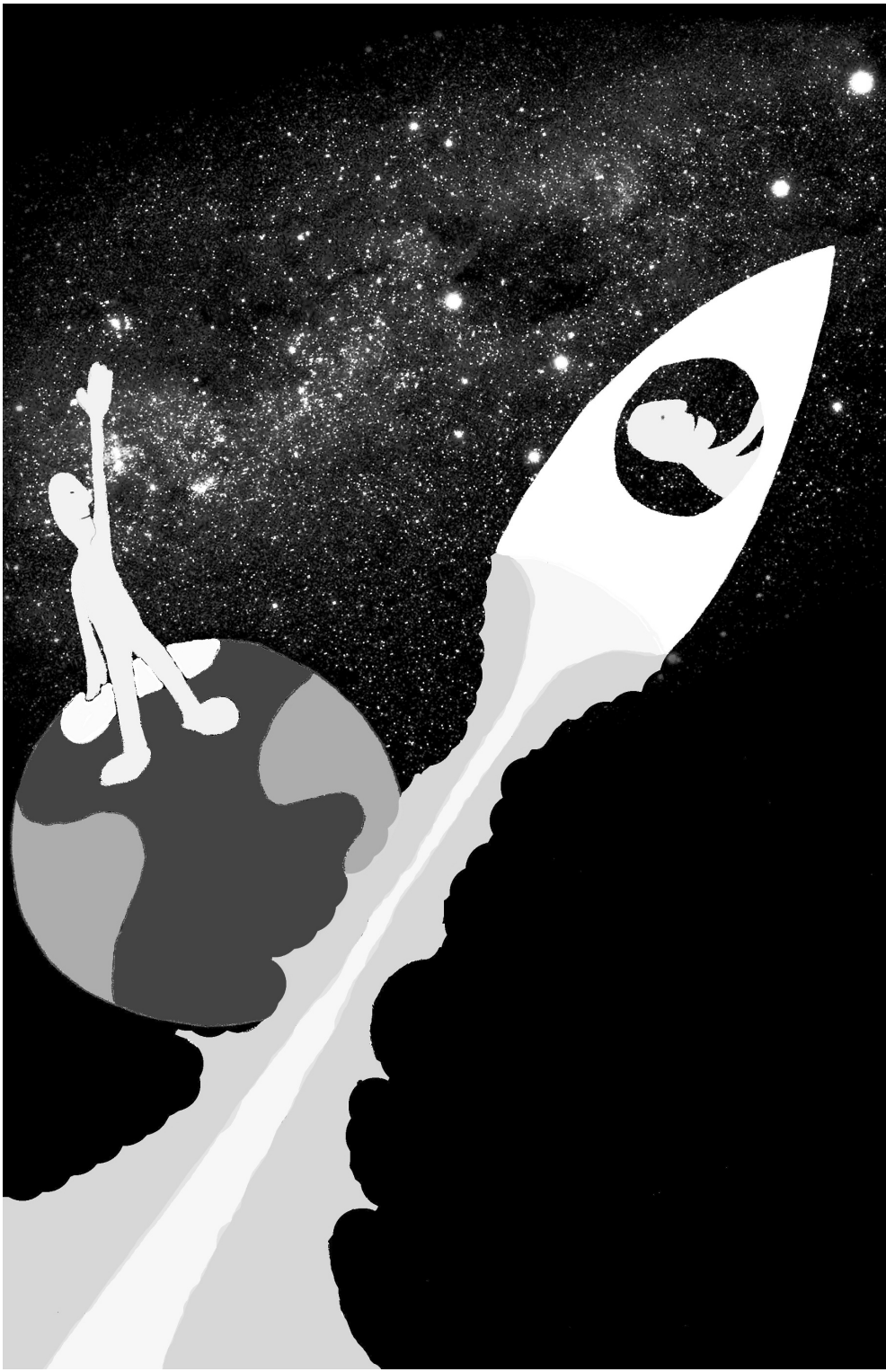
Notations : $g=g^x=g^1$ $a=a^x=d\,v^x/d\,t$ $v=v^x=d\,x/d\,t$

Correction page 439

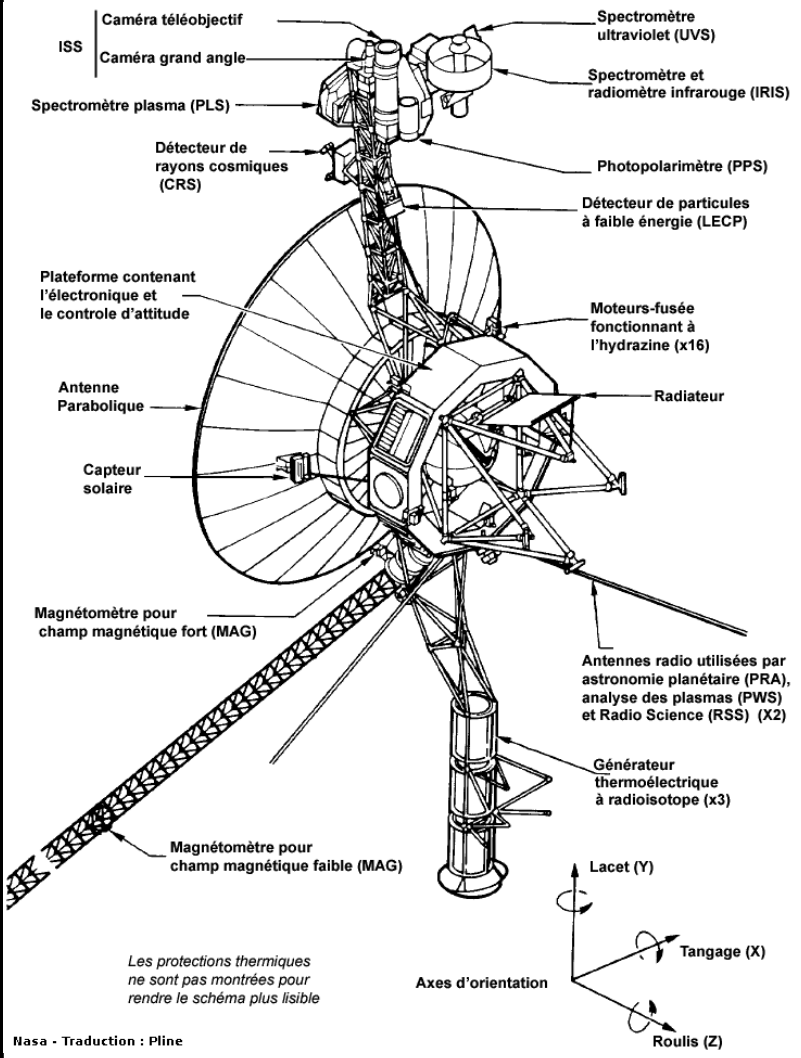
4. ▲△△ Intensité du quadripotentiel

Exprimez l'intensité de $\widetilde{A}$ en fonction de *r* et β.

Correction page 440



Sondes *Voyager 1 et 2*



9

Les voyages interstellaires et l'antimatière

∞ Introduction

Qui dit voyage, dit quitter son lieu de vie pour plusieurs raisons :

- par nécessité, pour des raisons de survie
- par esprit d'aventure et de découverte
- pour conquérir et coloniser

Pour toutes ces raisons, nous avons depuis des siècles :

- exploré notre planète Terre
- nous sommes en ce moment même en train d'explorer notre système solaire
- et, un jour, sûrement, nous quitterons notre système pour explorer d'autres étoiles

Notre planète est fragile, et, même, si nous parvenions à y vivre en harmonie, il peut sembler hasardeux de ne rester qu'en un seul lieu.

Une représentation d'une photo de notre galaxie, la Voie Lactée. La nuit par une belle nuit étoilée sans nuages et sans Lune, nous voyons clairement une zone laiteuse traverser la voûte céleste, la tranche de notre galaxie. Notre Soleil est au centre du petit cercle, et, la plupart des étoiles que nous voyons la nuit, sont nos voisines et sont contenues dans cette zone.
Bien sûr, ce n'est pas une vraie photo, nous n'avons jamais placé un appareil photo en un endroit extérieur à notre propre galaxie. Il s'agit d'une reconstitution réalisée par ordinateur à partir de vraies photos.

Par exemple, il est très probable qu'une météorite, comme celle qui a été responsable de la disparition des dinosaures, percutera à nouveau la Terre un jour, dans quelques années, ou, millions d'années, on ne sait pas. D'où l'idée d'une humanité multi-planétaire, avec comme point de départ l'établissement de colonies et bases extraterrestres autonomes.

Certains, comme Elon Musk visent la planète Mars avec une mission habitée prévue prochainement, et par la suite l'établissement d'une base martienne et la terraformation de la planète. Ce projet est passionnant, mais avant qu'un groupe d'humain puisse vivre sur Mars sans être dépendant des arrivées de fret de la Terre, il peut s'écouler plusieurs siècles.

La planète Mars est peut-être la meilleure candidate parmi les huit planètes qui gravitent autour de notre Soleil. Mais probablement pas parmi les milliers d'exoplanètes déjà découvertes qui gravitent autour d'autres étoiles !

L'idée est de rejoindre une exoplanète qui possède une plus grande similarité à la Terre que Mars, une planète jumelle de la Terre, ainsi, malgré un voyage plus long, la colonie pourrait s'établir bien plus rapidement.

Certains vous diront que les autres étoiles sont bien trop éloignées et que les voyages interstellaires sont irréalistes, alors qu'en fait nous sommes déjà en train

de réaliser des voyages interstellaires avec les sondes *Voyager*.

Elles ont été construites avec les technologies des années 70. Elles ont déjà traversé l'héliopause, limite de notre système solaire, et filent maintenant à travers le milieu interstellaire. Ces sondes ont été conçues pour seulement explorer le système solaire, mais, simplement, avec les technologies actuelles, elles pourraient être adaptées pour rejoindre d'autres étoiles. Par exemple, les piles à radio-isotopes vont s'arrêter en 2025 et la transmission avec. On peut aisément les remplacer par des piles avec un isotope de durée de vie bien plus longue.

Les sondes *Voyager* voyagent à quelque 61 000 km/h et rejoindraient l'étoile la plus proche de notre Soleil, Proxima du Centaure située à 4 années-lumière, en 70 000 ans[47].

C'est beaucoup par rapport à la durée de vie d'un individu, mais bien peu au regard de l'âge de l'humanité. Comme nous le verrons, le vaisseau peut être de grande taille et atteindre sur le même principe cette vitesse. Nous pouvons alors concevoir, toujours avec des technologies actuellement accessibles, un vaisseau ensemenceur.

Un voyage habité sur une telle durée est difficile à concevoir, des personnes naîtraient et mourraient dans le vaisseau sur plusieurs générations, ce type de vaisseau s'appelle un vaisseau générationnel.

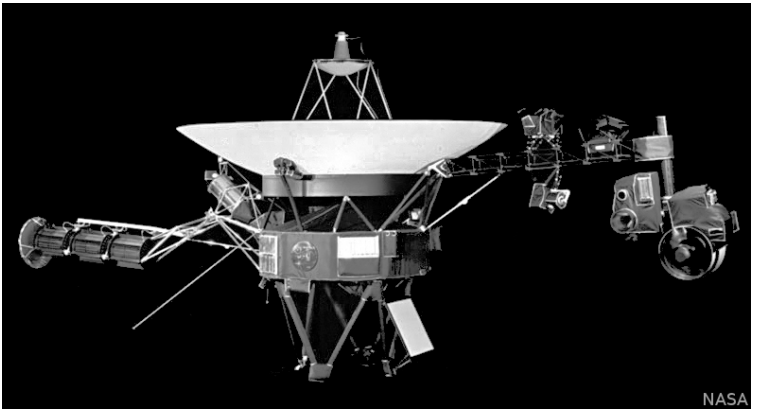
47 En fait, sur de telles durées nous ne pouvons plus considérer les étoiles immobiles les unes par rapport aux autres. Néanmoins, pour ne pas compliquer inutilement l'exposé et aller à l'essentiel nous considérerons l'étoile Proxima du Centaure fixe à 4 années-lumière.

Quant à lui, le vaisseau ensemenceur ne contient que des ovocytes et des spermatozoïdes congelés (aucun risque qu'ils se tapent dessus !). Une fois à proximité d'une planète jumelle de la Terre, un processus automatisé met en route les incubateurs et la première génération d'enfants sera élevée par des robots dotés d'intelligence artificielle.
À ce rythme, une civilisation humaine extraterrestre peut s'établir et relancer une nouvelle arche ensemenceuse en 100 000 ans. Ainsi, de proche en proche, par petits sauts de 10 années-lumière, l'humanité peut coloniser l'ensemble de la galaxie en moins d'un milliard d'années. Durée raisonnable, comparée à l'âge de notre Soleil, 4,5 milliards d'années, et l'apparition des premières cellules il y a 3,8 milliards d'années.

Nous allons tout d'abord parler des sondes *Voyager* pour ensuite détailler d'autres technologies qui permettraient de rejoindre les autres étoiles bien plus vite.

∞ Les sondes *Voyager*

Les deux sondes *Voyager 1* et *Voyager 2* ont été construites à l'identique et ont été lancées en 1977. Elles ont chacune une masse de 820 kg dont 90 kg d'ergols.



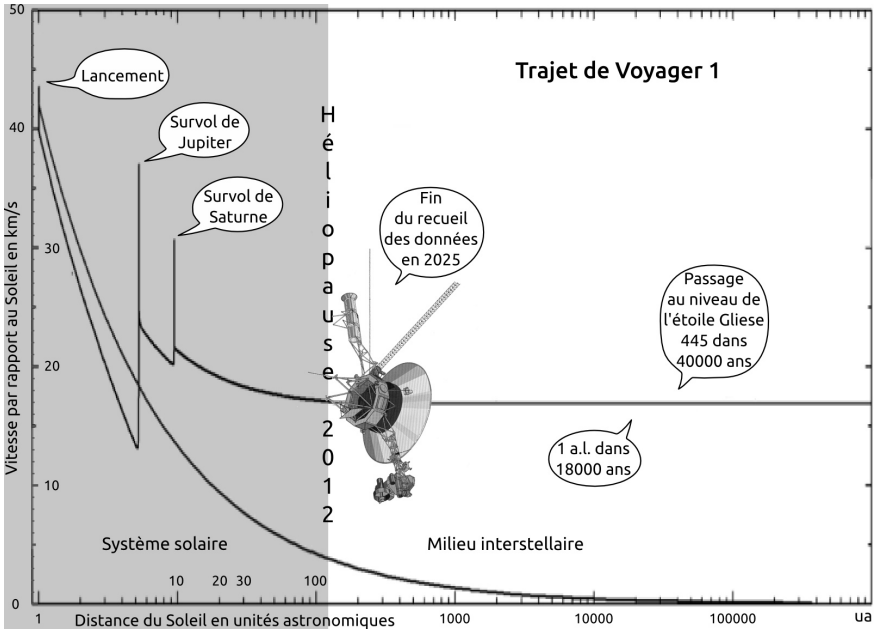
En astronautique le terme *ergol*, ou *propergol*, désigne la substance chimique qui permet la propulsion de la fusée. Pour que votre voiture fonctionne vous devez régulièrement amener votre véhicule à la pompe pour remplir le réservoir de carburant. Mais votre voiture ne pourrait pas fonctionner sur la Lune, car pour la combustion du carburant il y a aussi besoin de l'oxygène présent naturellement dans l'atmosphère terrestre. Une fusée fonctionne dans le vide et doit donc embarquer à la fois le carburant et le comburant, c'est l'ensemble des deux qu'on appelle ergol.

Au départ du sol les sondes ont quitté l'attraction terrestre au bord de fusées Titan contenant des tonnes d'ergols. S'ajoute à la vitesse ainsi gagnée celle de la Terre sur son orbite autour du Soleil, mais même ainsi la vitesse des sondes était insuffisante pour s'arracher à l'attraction solaire. Et ce n'est pas les quelques kg d'ergols embarqués par la sonde qui le permettraient, ils sont utilisés pour les corrections de trajectoires. Les sondes *Voyager* ont astucieusement utilisé l'assistance gravitationnelle des

planètes pour s'échapper du puits gravitationnel du Soleil.

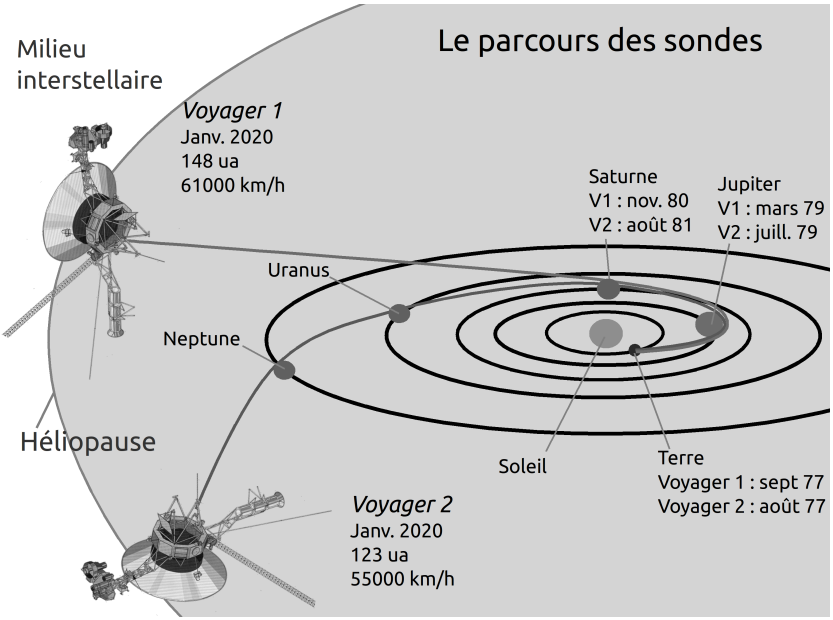
L'effet de fronde

On utilise la vitesse de révolution des planètes autour du Soleil. Par exemple, Jupiter orbite à 13 km/s autour du Soleil et la sonde *Voyager 1* suite à sa déviation par la planète a gagné plus de 12 km/s.



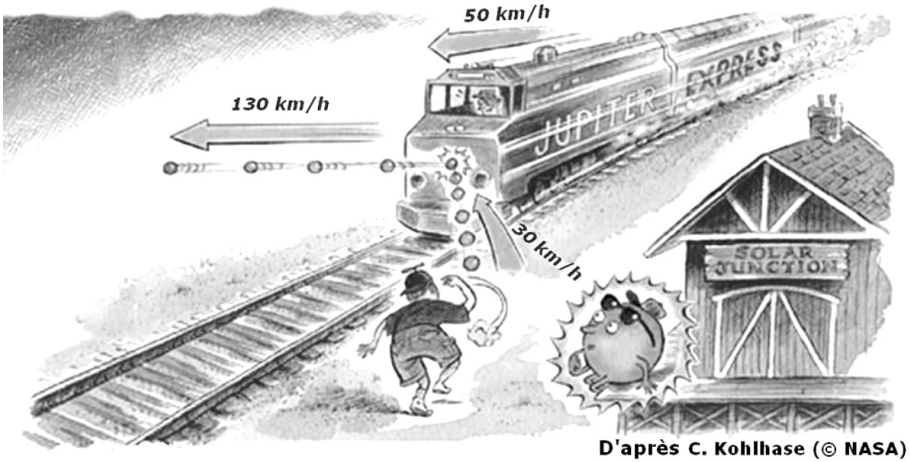
La ligne noire représente la vitesse de la sonde en fonction de la distance au Soleil (échelle multiplicative). Par son survol de Jupiter la sonde échappe à sa mise en orbite autour du Soleil. La ligne grisée traversée correspond à la vitesse nécessaire pour s'échapper de notre système stellaire. L'unité astronomique correspond à la distance Terre-Soleil, une année-lumière vaut environ 60 000 ua.

La sonde *Voyager 2* à même profité de l'effet de fronde de quatre planètes : Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

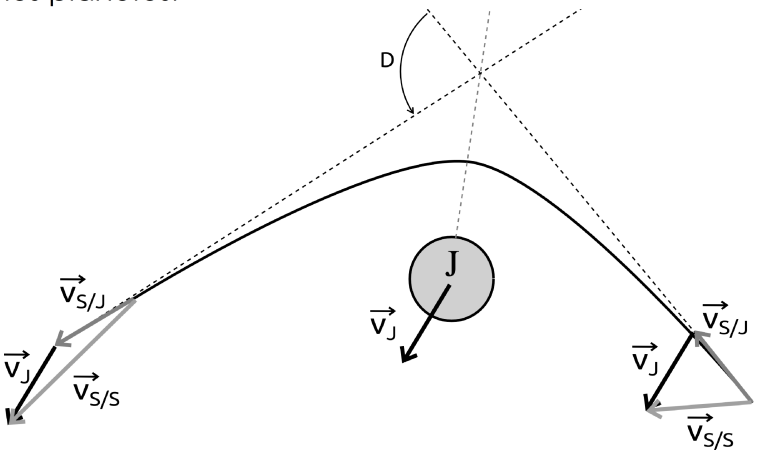


Nous avons un petit dessin, qui suit, qui permet de comprendre simplement l'effet de fronde. Un train avance vers vous à 50 km/h et vous lancez une balle à 30 km/h pour le faire rebondir sur le devant de la locomotive. Mettons-nous maintenant à la place du conducteur du train, il voit par additivité des vitesses la balle arriver plus vite, à 80 km/h, la somme des vitesses par rapport au sol du train et de la balle. Si le choc est parfaitement élastique, la balle repart donc, par rapport au train, avec la même vitesse et dans le sens opposé. Ainsi le lanceur de la balle voit celle-ci rebondir avec une vitesse de 130 km/h par rapport au sol. En lançant la

balle frontalement celle-ci voit sa vitesse augmenter du double de celle du train.



Si maintenant vous lancez la balle avec un certain angle, l'effet sera plus faible mais le principe reste le même. Il se passe la même chose avec la sonde et les planètes.



Jupiter au centre et la trajectoire hyperbolique de la sonde dans le référentiel qui a pour centre Jupiter. La

vitesse de la sonde $\vec{v}_{S/J}$ *par rapport à Jupiter change en direction mais pas en valeur. Il faut ajouter la vitesse par rapport au Soleil de Jupiter* $\vec{v}_J$ *pour obtenir la vitesse de la sonde* $\vec{v}_{S/S}$ *par rapport au Soleil. Nous constatons sur notre dessin que cette vitesse augmente, c'est l'effet de fronde. Dans l'exemple du train, il y avait demi-tour de la balle et la déviation* D *valait 180°. Pour le passage de la sonde* Voyager 1 *en mars 1979, la déviation valait 80° et la vitesse héliocentrique de la sonde a augmenté de 12,5 km/s*[48]*. L'objet qui profite de l'assistance gravitationnelle peut avoir une masse importante sans que l'effet soit modifié (sa masse doit rester petite devant la masse de Jupiter...).*

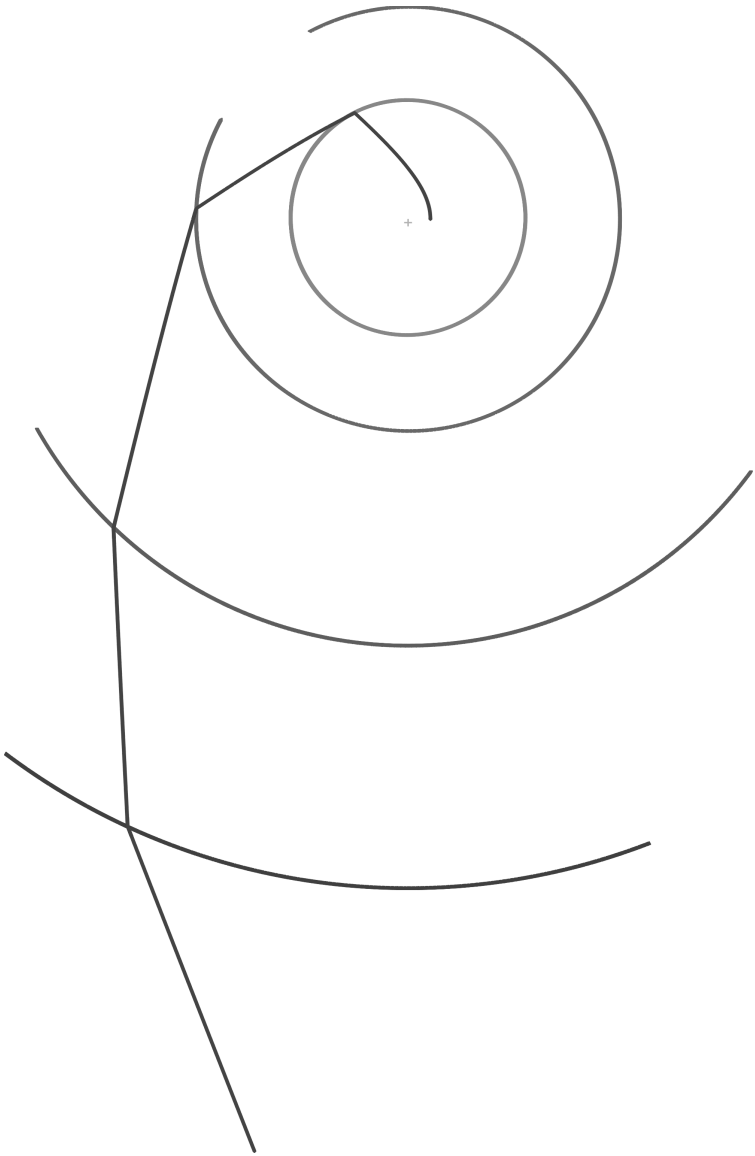
∞ Le projet *Voyager 3*

Les sondes *Voyager* n'ont pas été conçues pour un voyage interstellaire, mais pour explorer le système solaire. Pour le projet *Voyager 3*, nous optimisons les frondes pour gagner en vitesse et rejoindre les étoiles proches. Par exemple, nous pourrions profiter d'une opportunité, dans 25 000 ans, Proxima sera au plus proche du Soleil, à 3 année-lumières au lieu de 4.
Un beau projet pour l'humanité qui lui permet aussi de se projeter dans le temps.

Page suivante, une simulation numérique de la trajectoire du vaisseau avec les déviations successives à la rencontre de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

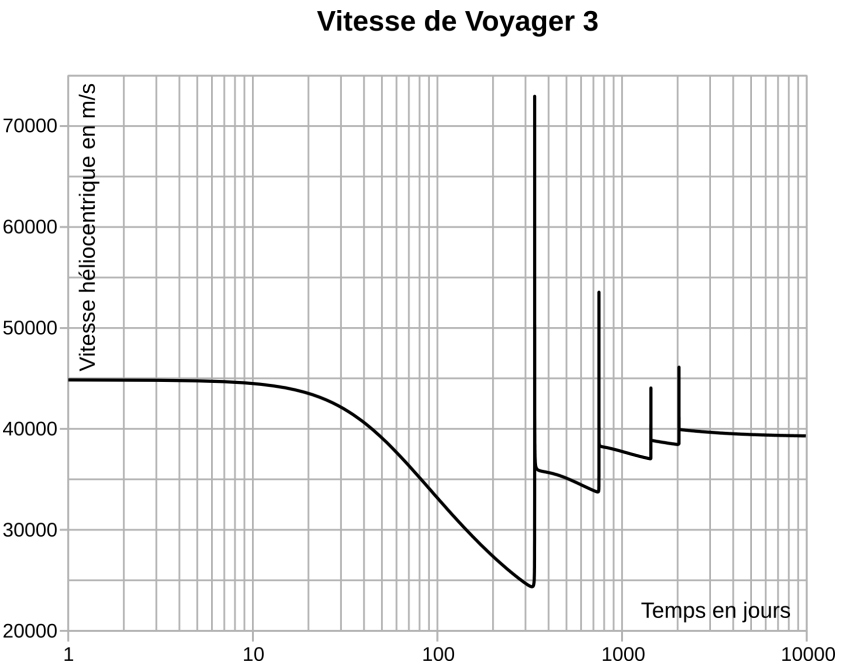
---

48 Document : *La fronde gravitationnelle* de Pierre Magnien, 2019.
Position en temps réel des sondes *Voyager* : voyager.jpl.nasa.gov.



Voyager 3 : la sonde est propulsée au niveau de l'orbite terrestre et elle enchaîne ensuite quatre frondes au niveau des géantes gazeuses. La vitesse finale est de 140 000 km/h. Deux différences par rapport aux sondes Voyager historiques : du propergol supplémentaire est utilisé et l'effet des frondes est optimisé.
La masse de l'ensemble, la sonde et le propergol, est très raisonnable : une dizaine de tonnes seulement, qui peuvent être envoyés dans l'espace avec les fusées actuelles.

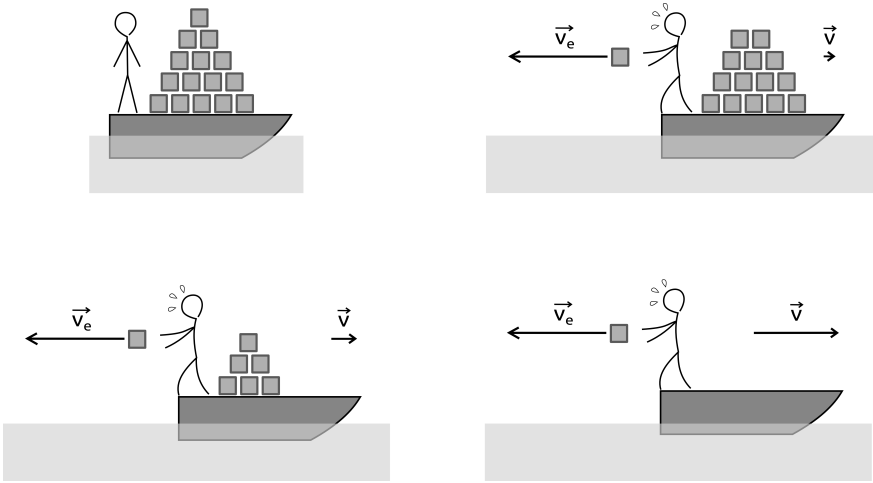
Ci-dessous, le profil de vitesse de la sonde. Nous voyons un surplus initial de vitesse de 5 km/s donné par les propergols. Chaque fronde frôle les hautes atmosphères des planètes gazeuses pour un gain de vitesse maximal.



LA LOI DE L'ASTRONAUTIQUE

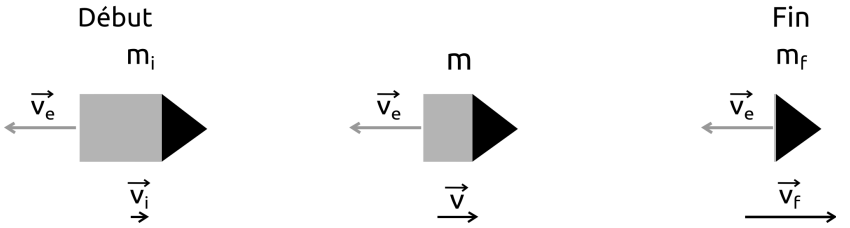
Nous aimerions aller encore plus vite vers les étoiles en propulsant la sonde avec des ergols. Les ergols brûlent et les gaz résultants sont éjectés vers l'arrière et permettent à la fusée de gagner de la vitesse par réaction. La loi de l'astronautique donne l'augmentation de vitesse Δv de la fusée en fonction de la masse initiale m_i de la fusée, de sa masse finale m_f et de la vitesse d'éjection v_e des gaz.

Nous pouvons commencer par illustrer cette loi avec l'exemple d'une barque sur laquelle une personne lance le plus loin possible et de toutes ses forces des pierres vers l'arrière :



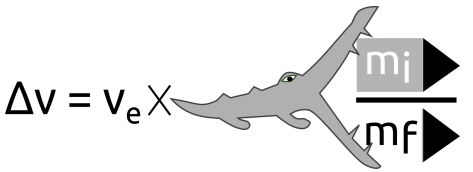
La barque est d'abord immobile avec toute sa réserve de pierres. La personne sur le bateau lance vers l'arrière une première pierre. L'embarcation se met alors légèrement en mouvement. C'est la conservation de la quantité de

mouvement. On néglige les frottements avec l'eau : la vitesse acquise est conservée. La personne lance les pierres jusqu'à épuisement du stock et la vitesse de la barque augmente à chaque lancer. La dernière pierre augmente la vitesse bien plus que la première car à la fin la barque est bien plus légère. Les premières pierres ne sont pas très efficaces car la barque est initialement très lourde et elles servent avant tout à la mise en mouvement du stock de pierres en attente.



La masse initiale de la fusée est celle de la sonde et des ergols, la masse finale correspond à la sonde seule. La variation de vitesse Δv est la différence entre la vitesse finale et la vitesse initiale. La masse de propergol nécessaire augmente très vite, bien plus vite que la vitesse atteinte.

Loi de l'astronautique :



Le crocodile illustre que malgré un rapport des masses rendu important par l'augmentation de la quantité d'ergols, ce rapport est massivement écrasé par la nécessité d'augmenter aussi la vitesse de ces mêmes ergols avant leur combustion.

Pour un propergol chimique classique nous avons une vitesse d'éjection d'environ 4 km/s. Imaginons que nous voulions aller deux fois plus vite pour rejoindre Proxima avec une sonde de type *Voyager*. Quelle quantité d'ergols faudrait-il embarquer ?
Nous avons alors Δv=60 000 km/h, soit 16 km/s. La masse de carburant à embarquer augmente exponentiellement et il faudrait 40 tonnes de propergols pour aller à Proxima en 35 000 ans... Pour y aller en 50 ans, on dépasserait largement la masse de l'Univers !

Durée d'un aller à 4 années-lumière (distance Soleil-Proxima actuelle) avec une sonde de type Voyager *à l'aide d'ergols traditionnels (énergie chimique / sonde d'une masse de 800 kg) :*

Durée du voyage	Masse d'ergols nécessaire	$\frac{m_i}{m_f}$	$\ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$
70 000 ans	0 tonne	1	0
35 000 ans	40 tonnes	50	4
1 000 ans	Masse supérieure à celle de l'Univers observable	∞	140
50 ans		∞	2800

Une fois le système stellaire rejoint nous pouvons ralentir la sonde par effet de fronde. Pour le voyage deux fois plus rapide, si nous ne voulons pas simplement survoler le système stellaire distant, l'effet de fronde ne sera pas suffisant pour se mettre en orbite autour de l'étoile et nous devons aussi amener du carburant pour ralentir la sonde. Comme nous avons un facteur 50, il faut pour cela 2000 tonnes d'ergols au départ de la Terre pour se satelliser au niveau de l'exoplanète à l'arrivée !

Pour contourner cette augmentation monstrueuse de la masse, il faudrait plutôt augmenter la vitesse d'éjection. Nous devons alors utiliser d'autres technologies. Nous pouvons utiliser l'énergie nucléaire ou l'énergie de masse.
Pour un kilogramme d'ergol quelle substance permet une libération maximale d'énergie ?

Comparons les efficacités énergétiques. C'est l'énergie libérée comparée à l'énergie de masse. Par exemple, un gramme d'anti-matière libère plus d'énergie que mille tonnes d'ergols chimique :

Ergol	**Efficacité**		**Détails**
Chimique	1 / 6 milliards	0,00000002 %	Oxygène-Hydrogène
Fission	un sur mille	0,1 %	Uranium 235
Fusion	1 sur 250	0,4 %	Deutérium-Tritium
Antimatière	1	100 %	$E=mc^2$

En l'état des connaissances scientifiques actuelles l'antimatière apparaît comme le carburant idéal. On convertit alors l'intégralité de la masse en énergie et en mouvement de la fusée.

Durée d'un aller pour Proxima du Centaure pour une sonde de type Voyager *à l'aide d'un réacteur à l'antimatière (rendement 10%) :*

Durée du voyage pour Proxima	Masse d'antimatière nécessaire
70 000 ans	0
35 000 ans	230 grammes[49]
10 000 ans	1,4 kg
1 000 ans	16 kg
50 ans	333 kg

Calculs pour une distance de 4 années-lumière. En fait, Proxima du Centaure sera au plus proche du Soleil à 3 al dans 25 000 ans. Pour une quantité équivalente d'ergols, on gagne 10 000 ans.

Nous voyons que le problème de la masse d'ergols à transporter a disparue. Nous allons donc nous intéresser à l'antimatière : sa nature, sa collecte et son stockage.

∞ L'ANTIMATIÈRE

Paul Dirac en 1928 a construit une théorie pour unifier la relativité restreinte et la physique quantique. C'est alors que l'antimatière s'est imposée dans les équations, elle a ensuite été découverte expérimentalement dès 1932 avec le positron. La prédiction théorique apparaît comme une symétrie dans les équations de Dirac. Dans la nature, à chaque particule élémentaire correspond une particule "jumelle", particule exactement de

49 Un gramme d'antimatière libère autant d'énergie qu'une bombe atomique.

même masse mais de charge électrique opposée. Par exemple, à l'électron correspond l'anti-électron couramment appelé positron, ou positon. En 1955, on a découvert l'antiproton en le créant avec un accélérateur de particules. En 1995, a été créé le premier atome d'antimatière, l'atome d'anti-hydrogène. Quand une particule de matière rencontre son homologue d'antimatière, les deux disparaissent pour s'annihiler en pure énergie. D'où peut-être le nom d'anti-matière, mais, pour éviter toute confusion liée à cette dénomination, précisons bien que l'antimatière est de la matière.

Nous pouvons produire l'antimatière de manière artificielle avec des accélérateurs de particules, mais elle existe aussi – bien qu'en quantité bien moindre que la matière – à l'état naturel.

La production d'antimatière en laboratoire demande beaucoup de temps et d'énergie. Par exemple, pour créer des anti-protons, on accélère des protons qui lors de leur collision à grande énergie créé des paires proton/antiproton :

$$p+p \rightarrow p+p + p+\bar{p}$$

On crée un proton pour rien et de plus le rendement est faible. C'est très intéressant et précieux pour comprendre les secrets de la matière à petite échelle, mais, pour produire le carburant d'une fusée ce n'est peut-être pas le plus judicieux[50].

50 En 2020, la production mondiale d'énergie correspond à l'énergie libérée par l'annihilation de 3,5 tonnes d'antimatière, néanmoins, avec les moyens actuels existants, même pour produire simplement un gramme d'antimatière, ce serait hors de prix.

Il serait plus simple de la collecter dans la nature. Les positrons sont libérés par la radioactivité bêta plus, par les rayons cosmiques ou même les orages. Les antiprotons sont un carburant de choix, car ils ont une énergie de masse bien supérieure à celle des positrons. Par contre, contrairement aux positrons, les antiprotons ne sont pas directement produits dans notre système solaire. Le Soleil, source la plus puissante d'énergie de notre système stellaire, ne monte en énergie qu'au niveau de la fusion et le vent solaire ne contient pas d'antiprotons. Il faut, donc, chercher une source d'antimatière à l'extérieur de notre système. Cette source existe, elle a été découverte en 1912, c'est le rayonnement cosmique. Celui-ci est constitué de particules de très haute énergie capables de créer des antiprotons. Les sources précises de ce rayonnement ne sont pas encore connues, mais l'on pense maintenant qu'elles sont principalement situées dans notre galaxie. Ce rayonnement galactique passe en permanence à travers le système solaire, et l'on estime que 200 000 tonnes d'antimatière traverse l'héliosphère tous les ans[51].

La densité d'antiprotons est plus élevée au niveau des magnétosphères planétaires. Par exemple autour de la Terre, il y a une ceinture d'antiprotons avec une zone mille fois plus dense que le rayonnement cosmique ambiant[52]. Les antiprotons

51 De nombreuses données sont issues d'un article très complet du Draper Laboratory : *Extraction of antiparticles concentrated in planetary magnetic fields*, 77 pages, 2006.

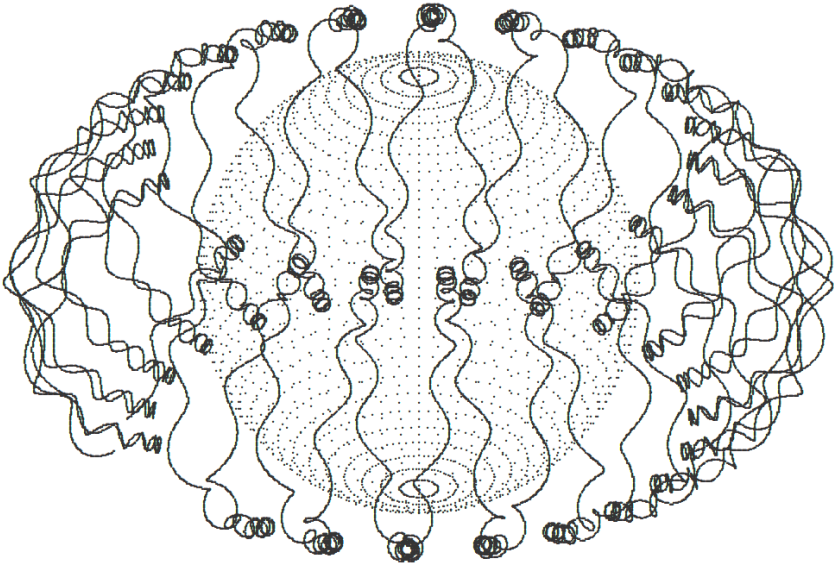
52 Analyse de résultats du détecteur PAMELA embarqué sur un

cosmiques sont piégés, et, de plus, d'autres sont directement créés par l'interaction des rayons cosmiques avec la couche supérieure de l'atmosphère terrestre. La ceinture d'antiprotons de la Terre est située à plusieurs centaines de kilomètres d'altitude dans la ceinture de Van Allen.

☌ JUPITER : LA POMPE À CARBURANT DU SYSTÈME SOLAIRE

La Terre génère un champ magnétique qui piège en altitude des particules chargées, comme des électrons contenus dans le vent solaire. Parfois lors d'une déstabilisation de la magnétosphère, par exemple suite à une éruption solaire, des particules électriques sont relâchées au niveau des pôles et créent de magnifiques aurores polaires. La magnétosphère joue le rôle d'une bouteille magnétique géante qui emmagasine toute sorte de particules chargée. La magnétosphère terrestre est soumise à un flux d'environ 4 grammes d'antiprotons par an. Mais ce sont principalement les grandes planètes gazeuses, et, sans conteste, la gigantesque magnétosphère de Jupiter qui pourrait contenir la plus grande quantité d'antimatière avec un flux estimé à 9 kg par an.

satellite en orbite terrestre : *The discovery of geomagnetically trapped cosmic ray antiprotons*, 2011.

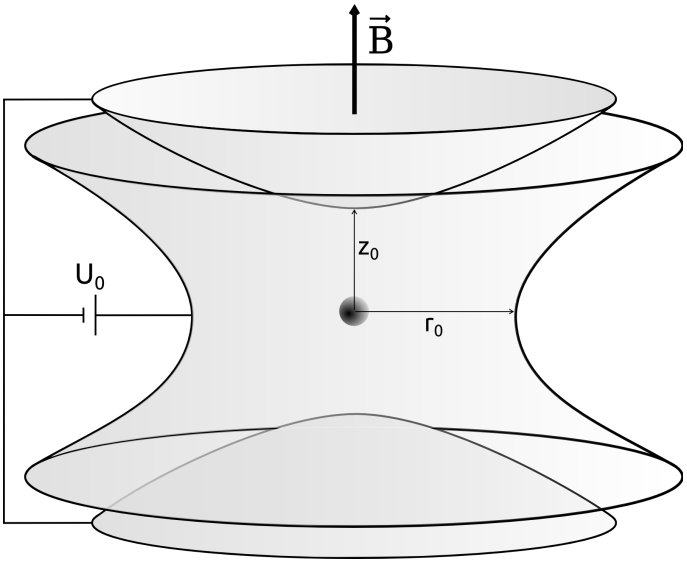


Une représentation de la ceinture d'antiprotons présente autour de la Terre. Ici, un antiproton qui se déplace à 70 % de la vitesse de la lumière. Le champ magnétique terrestre courbe sa trajectoire et l'emprisonne à l'aide de trois types de mouvements conjugués : le plus rapide, une rotation cyclotron qui lui fait faire des petits cercles, puis, une oscillation d'aller-retours entre les pôles, et finalement, une dérive, plus lente, qui lui fait faire le tour de la Terre.

Des satellites pourraient collecter et stocker cette antimatière. Les vaisseaux feraient alors le plein de carburant au niveau de Jupiter avant de partir vers les étoiles.

Le stockage de l'antimatière

On sait actuellement stocker des antiprotons pendant plus d'un an. La température est maintenue en dessous d'un Kelvin et les mesures des caractéristiques de l'antiproton sont extrêmement précises[53]. Néanmoins, les quantités sont très faibles et la masse du piège est très grande par rapport à la masse d'antimatière stockée.



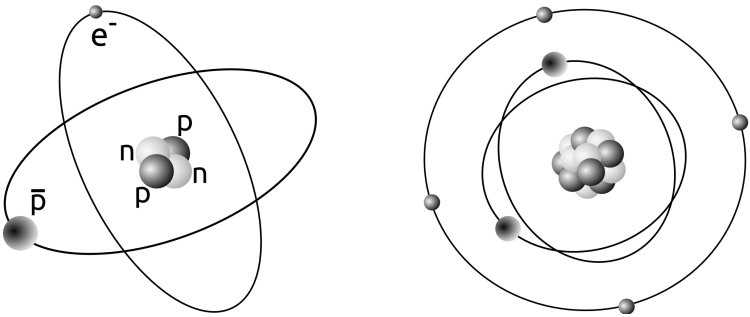
Piège de Penning. La combinaison d'un champ magnétique et d'un champ électrique permet de piéger des particules chargées au laboratoire.

L'idéal serait de stocker l'antimatière à l'échelle microscopique. L'antimatière ainsi piégée et confi-

53 Expérience BASE à Genève : *A parts-per-billion measurement of the antiproton magnetic moment*, revue Nature, 2017.

née à l'échelle atomique ou moléculaire pourrait alors être stockée comme la matière. Nous aurions un usage souple et polyvalent de ce nouveau carburant, autant pour les voyages spatiaux que dans notre quotidien. Par exemple, une voiture pourrait faire le tour de la Terre avec un seul plein de quelques milligrammes d'antimatière. Appelons *Proximium* ce carburant hypothétique du futur. Carburant luminique qui permettrait de rejoindre les étoiles et nous ferait entrer dans une nouvelle ère énergétique. Ce rêve pourrait-il devenir réalité ? Seule l'expérimentation permettra d'avancer sur cette question. Commençons par laisser notre imagination envisager différentes options.

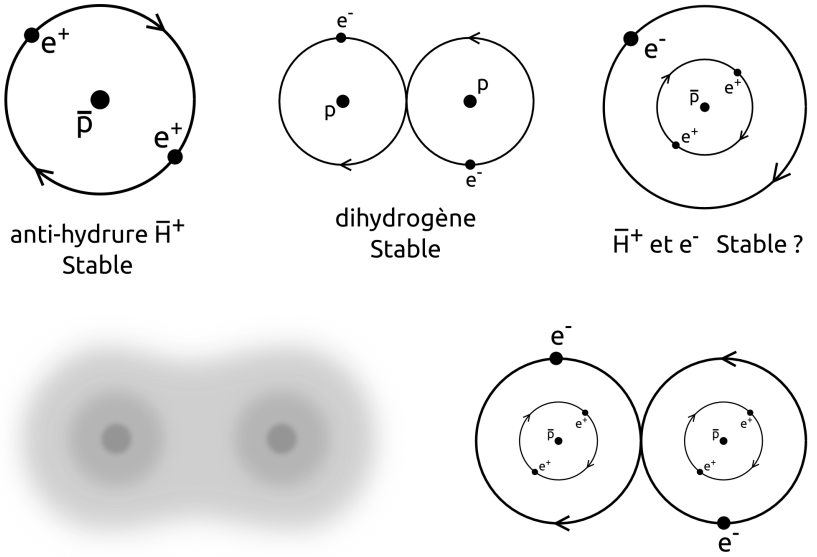
1 - Des atomes exotiques où un électron serait remplacé par un antiproton :



Cas d'atomes d'hélium et de carbone où un, ou plusieurs, e^- ont été substitués par un $\overline{p}$. Densité d'antimatière des structures : 20 % et 14 %. Le premier composé, parfois appelé hélium antiprotonique et noté $\overline{p}He^+$, a été découvert par sérendipité au laboratoire japonais du KEK en 1991, puis a été étudié au décélérateur d'antiprotons du CERN. Normalement un antiproton est stoppé par la

matière et s'annihile sur un noyau en un temps de l'ordre de la picoseconde. Dans cette expérience, où un faisceau d'antiprotons lents rencontre une cible d'hélium liquide, on obtient naturellement l'état métastable $\overline{p}He^+$ dans lequel l'antiproton piégé peut être stocké plusieurs microsecondes[54].

2 - Un atome $\overline{H}^+$ d'anti-hydrogène ionisé avec un positron supplémentaire, pourrait remplacer le noyau d'un atome d'hydrogène. Deux atomes exotiques de ce type constitueraient une molécule de Proximium :

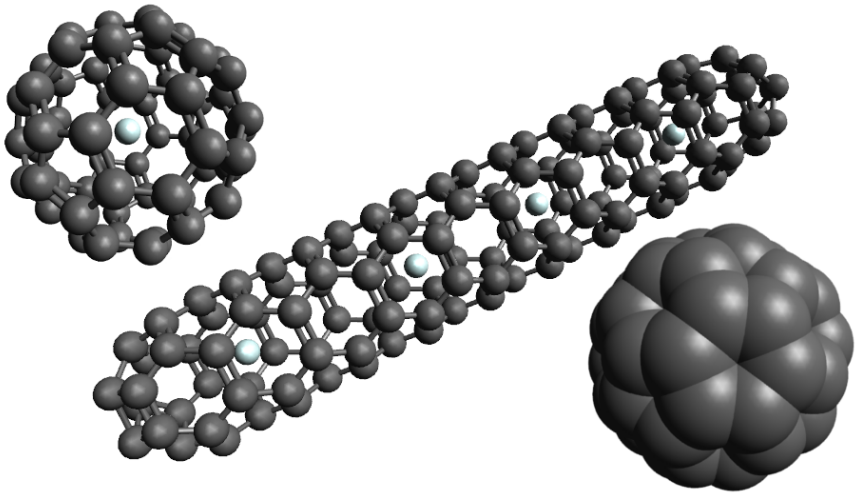


La densité de stockage serait dans ce cas de quasiment 100 %. Les recherches expérimentales peuvent d'abord se concentrer sur la synthèse d'une molécule d'anti-

54 Article de HAYANO *Spectroscopy of antiprotonic helium atoms and its contribution to the fundamental physical constants*, Japon, 2010.

proximium. Expérience plus facile à mettre en œuvre pour une molécule qui a la même stabilité.

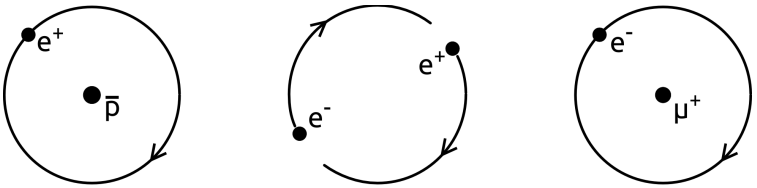
3 - Une molécule cage. Il existe de nombreuses molécules cage en chimie qui permettent l'encapsulation de molécules. Nous pouvons imaginer une telle molécule qui contient un antiproton comme dans un piège de Penning microscopique. Nous avons, par exemple, les molécules de type fullerène et les nanotubes :



Différentes structures à base de carbone. En haut à gauche, nous avons représenté le fullerène C_{60}. Différents types d'atomes ont déjà été piégés dans ces structures. Le fullerène peut facilement être négativement ionisé et pourrait ainsi constituer un bon piège à antiprotons. En bas à droite, la même structure en utilisant un modèle qui montre les sphères d'influence électrostatique des nuages électroniques. En diagonal, un nanotube avec 4 antiprotons confinés.

Et ainsi de suite... Nous pouvons pour commencer mesurer la durée de vie de telles structures, et peut-être un jour aurons-nous la bonne surprise d'en trouver une stable. La recherche scientifique permet de tester de multiples combinaisons. Le jeu en vaut la chandelle car même si nous ne trouvons pas ce que l'on cherche, nous aurons beaucoup appris sur la matière.

Les scientifiques ont déjà étudié différents atomes exotiques. Nous avons créé et étudié des atomes d'anti-hydrogène qui se sont révélés stables. Un autre dérivé de l'hydrogène, le positronium, constitué d'un électron et d'un positron qui tourne l'un autour de l'autre, a une stabilité de 100 nanosecondes. Le muonium, lui, remplace le noyau d'un atome d'hydrogène par un muon, la stabilité est de 2 microsecondes.



Anti-Hydrogène
Stable

Positronium
100 ns

Muonium
2 μs

La stabilité peut aussi dépendre du contexte. Par exemple, un neutron au sein du noyau d'un atome est stable, alors qu'à l'état libre, isolé, le neutron a une durée de vie de seulement 10 minutes.

∞ Conclusion

En apprenant à maîtriser l'antimatière nous pourrions rejoindre les premières étoiles en 50 ans et explorer de proche en proche l'ensemble de la galaxie en quelques millions d'années. Ce type de vaisseau pourrait être habité et doublerait rapidement les vaisseaux ensemenceurs précédemment envoyés. Les deux scénarios méritent d'être développés en parallèle sur les prochaines décennies.

Elon Musk projette une colonie sur Mars d'un million d'humains pour 2050 et une autonomisation progressive. Sont aussi prévues des microsondes pour Proxima propulsées par des lasers géants placés sur Terre.

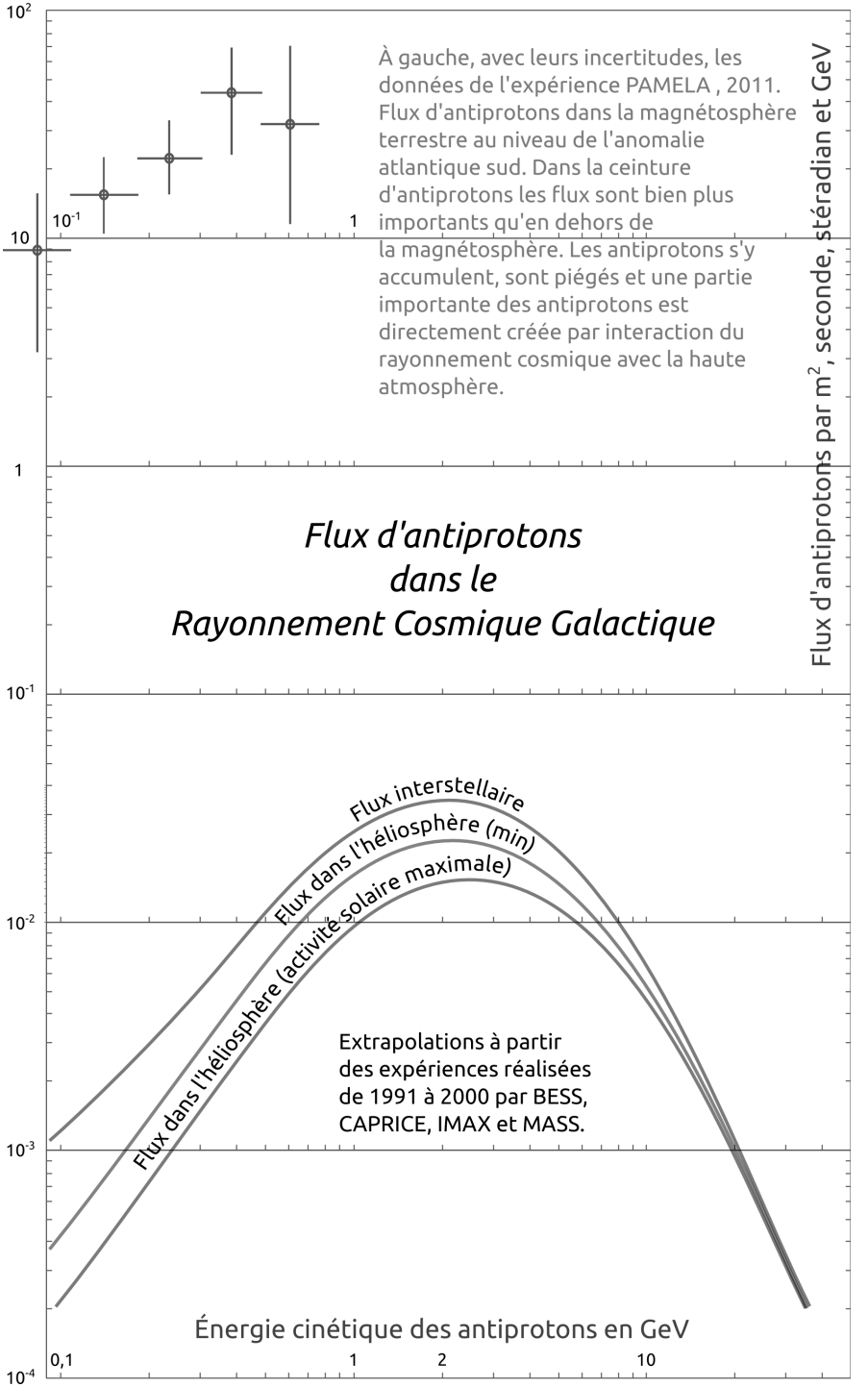
Souvent pour les voyages interstellaires la fission ou la fusion nucléaire sont proposées comme source d'énergie et l'antimatière est peu envisagée. Le but de cette conférence est de montrer l'important potentiel de l'antimatière comme élément clef pour le futur.

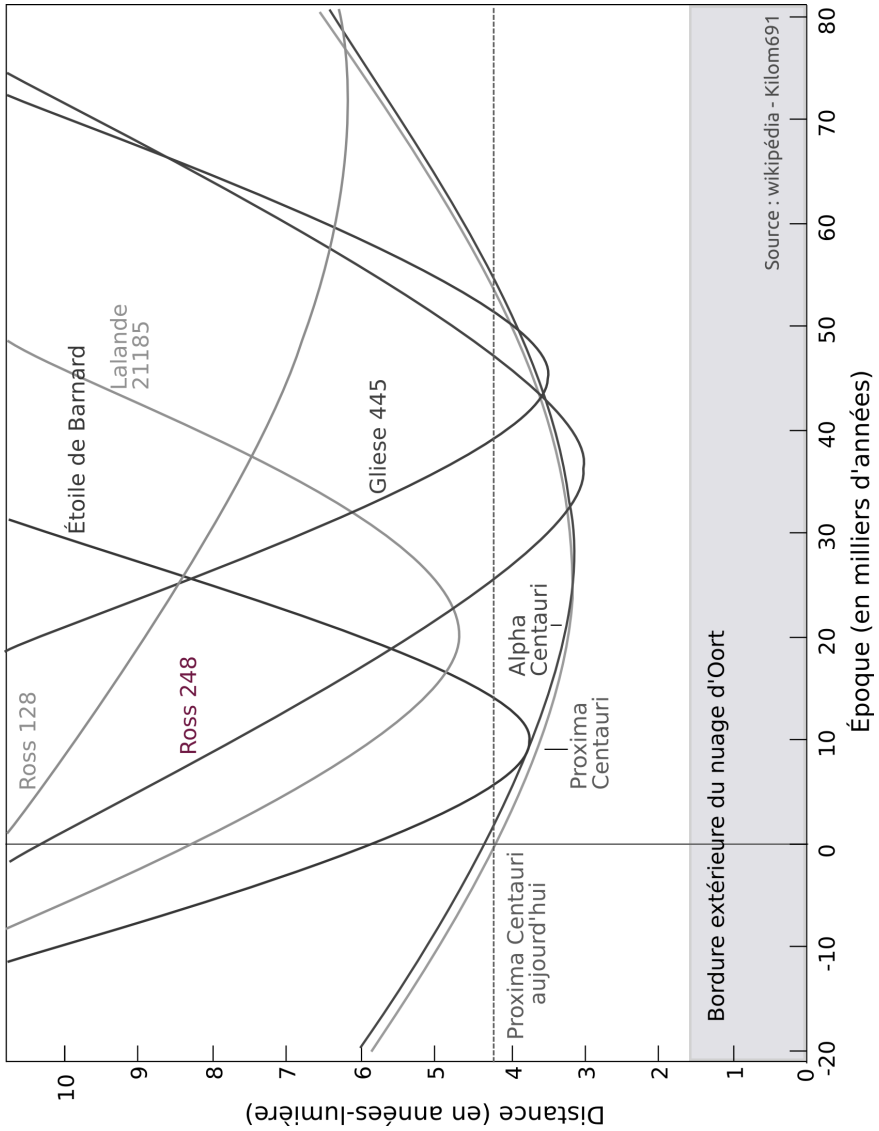
Exercices

1. ▲△△ Chiffres

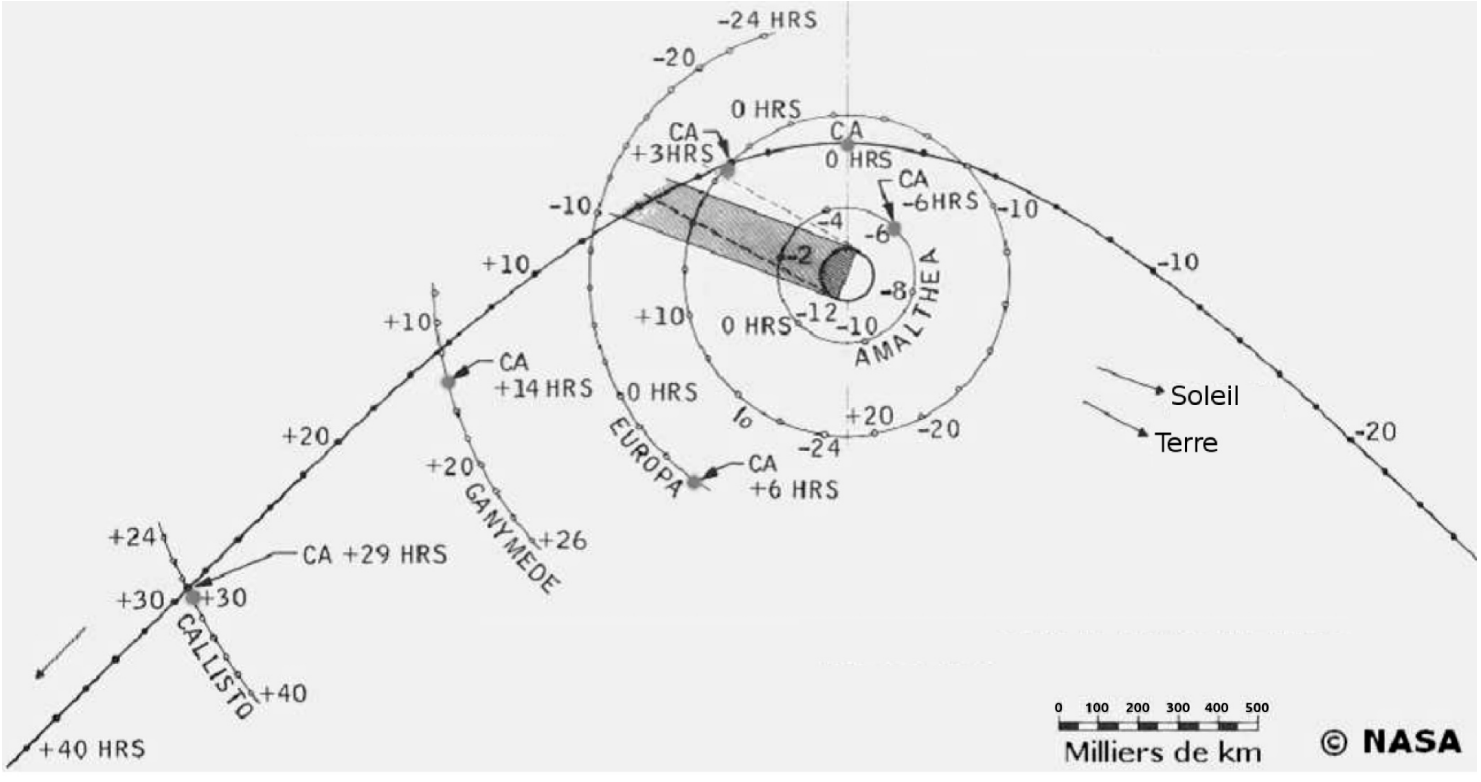
Retrouvez les chiffres de la conférence :

- Une sonde va à 61 000 km/h vers une étoile à 4 a.l. Retrouvez-vous 70 000 ans de voyage ?
- La consommation mondiale d'énergie est estimée en 2020 à 15 000 Mtep. Le tep (tonne équivalent pétrole) vaut 42 GJ. Montrez que cette énergie est équivalente à l'énergie libérée par l'annihilation de 3,5 tonnes d'antimatière.
- En utilisant les données du tableau page 34 de l'article *Extraction of antiparticles concentrated in planetary magnetic fields* retrouvez les 200 000 tonnes d'antimatière qui traverse l'héliosphère chaque année. Par exemple, pour Jupiter le flux est de 9,1 kg d'antiprotons pour une section efficace d'un rayon de 45 R_J (zone d'influence de la magnétosphère jovienne avec R_J le rayon de Jupiter). Le rayon efficace du Soleil est pris à l'héliopause, limite de la zone d'influence du champ magnétique solaire. Si maintenant l'on prend le flux interstellaire du rayonnement cosmique, externe à l'héliosphère, évaluez à combien s'élève le flux d'antimatière en utilisant la courbe qui suit. *Corr. p441.*


À gauche, avec leurs incertitudes, les données de l'expérience PAMELA , 2011. Flux d'antiprotons dans la magnétosphère terrestre au niveau de l'anomalie atlantique sud. Dans la ceinture d'antiprotons les flux sont bien plus importants qu'en dehors de la magnétosphère. Les antiprotons s'y accumulent, sont piégés et une partie importante des antiprotons est directement créée par interaction du rayonnement cosmique avec la haute atmosphère.
Flux d'antiprotons dans le Rayonnement Cosmique Galactique
Flux d'antiprotons par m², seconde, stéradian et GeV
Flux interstellaire
Flux dans l'héliosphère (min)
Flux dans l'héliosphère (activité solaire maximale)
Extrapolations à partir des expériences réalisées de 1991 à 2000 par BESS, CAPRICE, IMAX et MASS.
Énergie cinétique des antiprotons en GeV
10²
10
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
0,1
1
2
10



Sur des périodes importantes, de plusieurs milliers d'années, les étoiles ne peuvent plus être considérées fixes les unes par rapport aux autres. Les trois étoiles du système Alpha Centauri seront au plus proche dans 25 000 ans à trois années-lumière.



Au centre Jupiter. La trajectoire hyperbolique de Voyager 1 dans le référentiel d'inertie centré sur Jupiter.
Cinq satellites joviens avec les positions d'approche minimale (CA).

2.◣ ▲△△ Évolution de la distance des étoiles

Dans la conférence la distance Soleil-Proxima du Centaure est fixée à 4 années-lumière. Pour des voyages rapides les étoiles peuvent être considérées fixes, mais pour des voyages lents de plus de 10 000 ans les variations de distances ne sont plus négligeables. Nous avons placé la courbe dans les pages précédentes. Montrez que les sondes *Voyager 1* et *2* ne pourraient pas rejoindre Proxima du Centaure. Quelle devrait être la vitesse minimale des sondes ? Quelle vitesse doit avoir une sonde pour rejoindre le système Alpha Centauri lorsqu'il est au plus proche ?

Corr. p442.

3.◣√ ▲▲▲ Effet de fronde

Nous considérons le passage de *Voyager 1* au niveau de Jupiter.

a - Avec une vitesse initiale de 12,6 km/s pour la sonde et une vitesse jovienne de 12,8 km/s, trouver la variation de vitesse de *Voyager 1* (vitesses héliocentriques). Les mouvements sont supposés coplanaires et la trajectoire de Jupiter dans le référentiel héliocentrique circulaire. Vous estimerez les angles nécessaires à l'aide de la courbe page précédente.

Aide : il n'est pas facile de visualiser les asymptotes, trajectoires à grande distance de la sonde, la vue est trop rapprochée. Deux indications : l'angle intérieur entre

les deux asymptotes de l'hyperbole est de 82° et le paramètre d'impact b vaut 13 R_J (b : distance entre le barycentre de Jupiter et les asymptotes — R_J : rayon de Jupiter).
Définition des angles : $\alpha_i = \widehat{(\vec{v}_J, -\vec{v}_i)}$ *et* $\alpha_f = \widehat{(\vec{v}_f, \vec{v}_J)}$.

b - Évaluez sur le graphique de la NASA la vitesse maximale de la sonde au périastre. Le résultat correspond-il au pic sur la courbe page 283 ?
Estimez la vitesse de la sonde 38 heures après son passage au périastre. En déduire, par le calcul, la vitesse de la sonde à l'infini. Évaluer la distance minimale d'approche de *Voyager*, et, en déduire par le calcul le paramètre d'impact *b* de la sonde.

Aide : Pour un système isolé, dans un référentiel galiléen, il y a conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique.

c - Paramètres de la conique.
Trouvez le paramètre *p* de la conique, l'excentricité *e* et la déviation *D*.

Aides : La résolution générale du problème de Kepler permet d'obtenir l'équation polaire d'une conique (hyperbole, parabole et ellipse) :

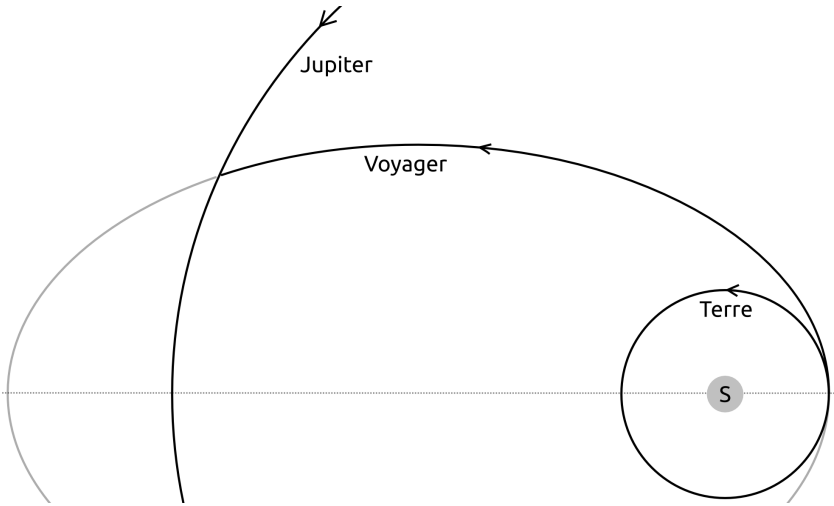
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad p = \frac{L^2}{\alpha m} \qquad \alpha = G m M$$

Origine du repère : centre de masse de Jupiter. Origine des angles : axe principal de l'hyperbole.
p : paramètre de la conique.
e : excentricité. L : moment cinétique de la sonde.
$M=M_J=1{,}90.10^{27}$ kg. m : masse de la sonde.
Distance Soleil-Jupiter : 800.10^6 km. $M_S=2.10^{30}$ kg.

d - Nous voulons augmenter l'effet de fronde.

• Tout restant égal par ailleurs, pour quelle valeur de α_f nous obtenons une v_f maximale ? Déterminez la Δv correspondante. Si la sonde quittait ensuite directement le système solaire, quelle serait sa vitesse interstellaire ?

• La trajectoire de la sonde depuis la Terre est considérée correspondre à une orbite du type ellipse de transfert d'Hohmann.
Que vaut le demi-grand axe a de cette ellipse ?



Nous pouvons aussi retrouver l'angle d'approche. Comment pourrions-nous augmenter la vitesse interstellaire de la sonde ? Nous devons ne pas trop nous approcher de Jupiter. Le rayon équatorial de Jupiter vaut 71 492 km et une altitude de 1 000 km place la sonde au plus près, dans une atmosphère suffisamment tenue pour que son influence puisse être négligée.

Aides : Énergie mécanique pour une conique :

$$E_m = \frac{\alpha}{2p}\left(e^2 - 1\right). \quad \textit{Ellipse :} \quad E_m = -\frac{\alpha}{2a} \quad \text{et} \quad p = \frac{b^2}{a}$$

• Expliquer pourquoi Mars ne permet pas d'avoir un effet de fronde conséquent malgré sa vitesse orbitale importante.

• Retrouvez les caractéristiques du profil de vitesse de *Voyager 1* en enchaînant les deux frondes (Jupiter puis Saturne). On peut utiliser un tableur pour un calcul systématique pour *n* frondes. Conservation du moment cinétique et de l'énergie mécanique entre chaque fronde, propriétés de l'hyperbole au moment de la fronde.

• Modélisez la succession des quatre frondes de Jupiter à Neptune. Montrez que l'on peut ainsi obtenir, en optimisant les effets successifs, une vitesse interstellaire de 100 000 km/h (sur le principe des sondes *Voyager* et en n'utilisant que l'assistance gravitationnelle). Montrez qu'en donnant, au niveau de l'orbite terrestre, un surplus de vitesse de 4,8 km/s à l'aide d'ergols, la sonde atteint une vitesse interstellaire supérieure à 137 000 km/h.

• Globalement, l'ensemble des planètes effectuent leur révolution autour du Soleil dans un même plan, appelé plan de l'écliptique. Dans notre modèle pour la succession des frondes, la sonde sort donc du système solaire selon ce plan. Or la majeure partie des étoiles sont hors de ce plan. Par exemple, au plus proche, dans 25 000 ans, l'étoile Proxima sera

située 39° en dessous du plan de l'écliptique[55]. La vitesse donnée par l'assistance gravitationnelle a une valeur mais aussi une direction spécifique. La direction de la vitesse est tout aussi importante que sa valeur : à quoi bon aller vite si ce n'est pas vers le bon endroit. Avez-vous une solution à proposer pour avoir une vitesse correctement dirigée sans utiliser d'énormes quantités de propergols ?

• La sonde à l'issue de son voyage de 25 000 ans survol le système stellaire d'Alpha Centauri.
Comment faudrait-il procéder pour ralentir la sonde afin qu'elle soit piégée par le système stellaire ?
Faut-il prévoir à cet effet des réserves de propergol supplémentaires ?

Corr. p442.

$4.\frac{01}{10}\sqrt{}$ ▲▲▲▲ Simulations numériques des frondes

Les simulations vont permettre de retrouver les résultats établis dans l'exercice précédent à l'aide des formules de Kepler. Aussi, les simulations donnent une grande liberté et aident à envisager nombre de situations. La contrepartie est la puissance de calcul nécessaire. Nous utiliserons celle d'un ordinateur personnel. Cela sera suffisant pour une première approche et pour expliquer les principes de base.

55 Calculs dans l'exercice *Mouvement des étoiles* page 322.
Coordonnées écliptiques actuelles des étoiles :
heasarc.gsfc.nasa.gov/cgi-bin/Tools/convcoord/convcoord.pl.
Souvent seules les coordonnées équatoriales sont données, toutes les conversions sur ce site.

Nous allons étudier le problème de N corps en interaction gravitationnelle. La modélisation est très ambitieuse et le temps de calcul peut être très long : le nombre d'interactions évolue en N factoriel et à partir de N=3 nous pouvons avoir des régimes chaotiques. Chaque corps possède 6 degrés de liberté, trois pour la position et trois pour les composantes de la vitesse. Nous allons, donc, simplifier avec un ensemble d'hypothèses raisonnables.

Pour les sondes *Voyager* les mouvements vont être considérés dans un même plan : en effet, c'est une réalité, globalement l'ensemble des planètes orbitent dans le plan de l'écliptique, de plus, on montre que le mouvement à deux corps se fait dans un plan.
Nous considérerons le Soleil fixe. On a ainsi un corps de moins à considérer. Le référentiel héliocentrique est alors galiléen. Pas besoin de considérer le centre de masse du système solaire et le référentiel de Copernic, car la masse du Soleil est très grande devant celles des autres astres.
Nous ne considérerons pas les forces entre les planètes. Toujours pour simplifier les équations, diminuer le nombre de relations, et le temps de calcul. Seul le Soleil exerce sa force sur une planète. Seule la sonde reste connectée à l'ensemble des astres.

Les équations du mouvement de Newton donnent un système d'équations différentielles couplées :

$$\frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt}=\vec{v}_i \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{v}_i}{dt}=\sum_{j\neq i} Gm_j\frac{\overrightarrow{M_iM_j}}{r_{ij}^3}$$

Pour chaque corps, nous avons deux équations différentielles vectorielles d'ordre un. Pour un mouvement 2D, nous avons quatre variables par corps : x_i, y_i, v_{xi} et v_{yi}. Finalement, pour la sonde et les quatre géantes gazeuses cela fait 20 équations. C'est déjà pas mal.

Le principe de la résolution numérique est simple, c'est une méthode pas à pas. Nous avons les conditions initiales à *t=0*, positions et vitesses de tous corps. Après un petit intervalle de temps Δt, nous évaluons les nouvelles vitesses et positions grâce aux équations différentielles. Nous passons ainsi, de proche en proche, de t_n à t_{n+1} :

$$x_{i,n+1}=x_{i,n}+v_{x,i,n}\Delta t \text{ , ... ,}$$

$$v_{x,i,n+1}=v_{x,i,n}+F_{x,i}(x_{j,n},y_{j,n})\Delta t \text{ , ...}$$

C'est *la méthode d'Euler*. Nous étudierons ensuite *la méthode de Runge-Kutta* bien plus précise.

Mécaniquement, comme les sucres tombent l'un après l'autre, nous avançons causalement d'une étape à l'autre. À chaque pas, nous faisons une petite erreur locale qui s'accumule à celle du pas précédent. Nous prendrons un pas suffisamment petit pour pouvoir convenablement linéariser chaque segment et minimiser l'erreur globale.

N'étant pas mathématiciens, nous nous contenterons dans cet exercice d'initiation, de contrôler en bons physiciens, la conservation de l'énergie méca-

nique et du moment cinétique.
Nous utiliserons un tableur. Nul besoin de télécharger un logiciel de programmation particulier, une feuille de calcul suffira.
Commençons par nous entraîner sur des modèles simples pour lesquels les solutions analytiques sont connues.

1 - *Révolution de la Terre autour du Soleil* :
Prenons comme conditions initiales la Terre à son périhélie : r_{min}=147 098 074 km et v_{max}=30 287 m/s.
Masse du Soleil : M_S=1,9891.10^{30} kg.
Constante de gravitation : G=6,6743.10^{-11} N.m^2/kg^2.

a- *Lois de Kepler :* Les données précédentes proviennent de Wikipédia. Déterminez, à partir de celles-ci, le paramètre *p* de la conique, l'excentricité *e*, r_{max}, v_{min}, le demi-grand axe *a* et la période *T*.

b- Première simulation avec un pas h=1 jour.
Obtenez-vous une simulation satisfaisante sur une révolution ? Quel est le pourcentage d'erreur sur le rayon après un tour ? Comment évolue ce pourcentage pour h/2, h/4 et h/8 ?
Retrouvez-vous les bonnes valeurs pour la période de révolution et les valeurs à l'aphélie ?
Ne serait-ce que sur le premier pas de t=0 à t=h, constatez-vous une anomalie ?
Comment l'expliquer ?
Nous avons calculé les valeurs à t_{n+1} à partir de celles à t_n. Par exemple, la vitesse $v_{x,n+1}$ est calculée avec $v_{x,n}$, x_n ,et y_n . Sur le même principe, la position x_{n+1} est calculée avec $v_{x,n}$ et x_n . Mais il serait aussi tout à fait possible de déterminer les positions x_{n+1} et

y_{n+1} avec les vitesses au rang n+1. En effet, ce n'est pas plus faux de prendre la vitesse en fin d'intervalle qu'en début. Faites à nouveau tourner la simulation pour h=1 jour avec cette modification pour le calcul des positions. Trouvez-vous maintenant de meilleures estimations pour la période et l'aphélie ? Que vaut alors l'erreur globale pour le rayon après une révolution ? Que vaut la variation d'énergie mécanique sur 365 jours ? Conclusion.

2 - *Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)* :

L'erreur globale avec la méthode d'Euler était de l'ordre de h, avec la méthode du point milieu selon h^2, et avec RK4 en h^4. Certes le calcul pour une étape sera un peu plus long, mais le temps total de calcul pour la même erreur globale sera immensément plus court. Plutôt que de n'utiliser qu'une seule pente, celle en début d'intervalle, comme pour la méthode d'Euler, nous utiliserons quatre pentes judicieusement réparties et pondérées sur l'intervalle.

Nous donnons le schéma de Runge-Kutta général pour deux degrés de liberté, et nous vous laisserons généraliser. Les degrés de liberté sont nommés X et Y. Par exemple, en physique, pour un mouvement à un corps selon une direction, nous aurions X=x et $Y=v_x$.

X(t) et Y(t) obéissent aux équations différentielles suivantes :

$$\frac{dX}{dt}=A(X,Y) \quad \text{et} \quad \frac{dY}{dt}=B(X,Y)$$

Avec les conditions initiales X(0) et Y(0) connues.

Nous déterminons les valeurs X_{n+1} et Y_{n+1} à partir de celles du rang précédent X_n et Y_n sur l'intervalle [nh, (n+1)h] avec la méthode itérative qui suit. Pour chaque degré de liberté nous avons quatre pentes à calculer. Par exemple, pour X, A_1 correspond à la pente en début d'intervalle, A_2 et A_3 sont des estimations de la pente en milieu d'intervalle, et A_4 une estimation en fin d'intervalle :

$$A_1 = A(X_n, Y_n) \qquad B_1 = B(X_n, Y_n)$$

$$A_2 = A\left(X_n + \frac{h}{2} A_1, Y_n + \frac{h}{2} B_1\right)$$

$$B_2 = B\left(X_n + \frac{h}{2} A_1, Y_n + \frac{h}{2} B_1\right)$$

$$A_3 = A\left(X_n + \frac{h}{2} A_2, Y_n + \frac{h}{2} B_2\right)$$

$$B_3 = B\left(X_n + \frac{h}{2} A_2, Y_n + \frac{h}{2} B_2\right)$$

$$A_4 = A\left(X_n + h A_3, Y_n + h B_3\right)$$

$$B_4 = B\left(X_n + h A_3, Y_n + h B_3\right)$$

$$X_{n+1} = X_n + \frac{h}{6}\left(A_1 + 2A_2 + 2A_3 + A_4\right)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}\left(B_1 + 2B_2 + 2B_3 + B_4\right)$$

Nous reprenons le cas de la révolution de la Terre autour du Soleil avec cette méthode.

a- Établir le schéma de RK4 pour résoudre ce problème : définir les variables, écrire les équations différentielles d'ordre 1 en nommant les fonctions et nommer les pentes.

b- Lancer le calcul numérique pour un pas d'un jour et comparer la précision de la méthode avec les simulations précédentes.
La méthode RK4 sera maintenant la méthode privilégiée.

3 - *Voyager 1* : Établir le schéma de Runge-Kutta (ici, nous avons 48 pentes à calculer pour chaque itération). Retrouver les caractéristiques du profil de vitesse, les distances d'approche et vérifier les valeurs et la conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique entre deux frondes.
Il sera nécessaire d'adapter le pas au moment des frondes, car la courbure est alors importante. Le mouvement est plan et sur chaque pas vous pouvez calculer la variation angulaire sur le cercle osculateur pour contrôler un bon suivi de la trajectoire.

4 - *Projet Voyager 3* : retrouver le profil de vitesse. L'ajustement des conditions initiales pour enchaîner parfaitement les quatre frondes peut être fastidieux. Il peut être judicieux de procéder comme dans la réalité, avec, par exemple, l'utilisation d'un peu d'ergol pour une correction de trajectoire au périastre d'Uranus (dépense énergétique minimale : survol propulsé et Effet Oberth).

Corr. p458.

5.√ ▲▲△ Calcul des masses de propergols

Il s'agit de retrouver toutes les valeurs données pendant la conférence.

1 - Vous êtes de sortie pour quelques réparations à l'extérieur de votre station spatiale. Mais une petite perte d'attention et vous voilà détaché de votre filin dérivant librement dans l'espace votre clef à molette à la main. Vous vous éloignez lentement de la station. Comment pourriez-vous revenir à la station ? En lançant la clef à molette d'un kilo de toutes vos forces celle-ci peut atteindre une vitesse de 36 km/h. Votre masse, combinaison incluse, est de 100 kg. Quelle sera votre vitesse après le lancer ? Quelle grandeur est conservée avant et après ? L'énergie est-elle une grandeur qui se conserve ? L'énergie cinétique acquise pas la clef est-elle la même que la vôtre ?

2 - Reprendre le calcul pour une fusée. Dans ce cas la masse varie eu cours du temps et il faut intégrer. La vitesse d'éjection des gaz est considérée constante. Montrer comment la formule s'adapte pour l'antimatière.

3 - Dans le cas relativiste de *Voyage pour Proxima,* calculez, pour une fusée photonique idéale, les masses d'antimatières pour un aller et un aller-retour. Durée de l'aller : 3 années de temps propre.
Accélération constante : 1 *g*.

4 - Calculez la masse de propergols nécessaires pour le *Projet Voyager 3*.

Correction p473.

6. ▲△△ Alignements des planètes

Pour les frondes, les planètes doivent avoir des positions relatives particulières. Nous pouvons utiliser les alignements comme repères. Par exemple, pour une fronde au niveau de Jupiter après un départ depuis la Terre, nous commençons par chercher les dates d'alignement Soleil-Terre-Jupiter. Les alignements recherchés sont approximatifs. Les alignements parfaits sont très rares ou inexistants. Par exemple, l'alignement global de la Terre avec la Lune et le Soleil, a lieu toutes les demi-lunaisons. Par contre, les alignements exacts ne se produisent qu'aux moments des éclipses.
Nous considérons les trajectoires circulaires et coplanaires. Périodes de révolution des géantes gazeuses :

$$T_{Jupiter} \simeq 11{,}86\, ans \qquad T_{Saturne} \simeq 29{,}44\, ans$$

$$T_{Uranus} \simeq 84{,}05\, ans \qquad T_{Neptune} \simeq 164{,}86\, ans$$

1 - Montrez que deux planètes A et B se retrouvent alignés selon la période :

$$T_{AB} = \frac{T_A T_B}{T_B - T_A}$$

où B est plus éloignée du Soleil que A. T_{AB} est la période synodique.

2 - Déterminez la période synodique Terre-Jupiter et la prochaine date d'alignement en vous aidant des éphémérides[56].

56 Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides de l'Obs. de Paris / CNRS : vo.imcce.fr/webservices/miriade/?forms

3 - Déterminez une date pour l'alignement Terre-Jupiter-Saturne.

4 - Sur quelle périodicité a lieu l'alignement des quatre géantes gazeuses avec la Terre ?

Corr. p477.

7.√ ▲△△ Mouvement des étoiles

Pour un voyage rapide vers les étoiles voisines nous pouvons les considérer fixes. Dans le cas du voyage lent sur 25 000 ans, nous devons anticiper le mouvement de l'étoile pour lancer la sonde dans la direction où elle sera au moment de l'arrivée. La vitesse d'une étoile est décomposée en ses parties transversales et radiale. Les composantes transversales sont connues avec une bonne résolution grâce au satellite *Hipparcos*, et maintenant, avec le satellite *Gaia*, encore plus précis, qui a pris le relais en 2013. Le spectromètre de *Gaia* permet, par méthode Doppler, d'améliorer la précision sur la partie radiale.

1 - *Détermination de la vitesse d'une étoile* :

Les tables donnent la distance actuelle d_0 de l'étoile, le mouvement apparent μ, et, la vitesse radiale v_r. Le mouvement apparent indique le déplacement angulaire par unité de temps. Cette variation angulaire est elle-même décomposée en deux composantes orthogonales, selon la longitude et la

Form. : p:Earth, p:Jupiter / Héliocentrique / Coordonnées écliptiques.

latitude en coordonnées équatoriales : μ_α et μ_δ.

α : ascension droite / δ : déclinaison

unités : millièmes de secondes d'arc par an

Proxima Centauri :

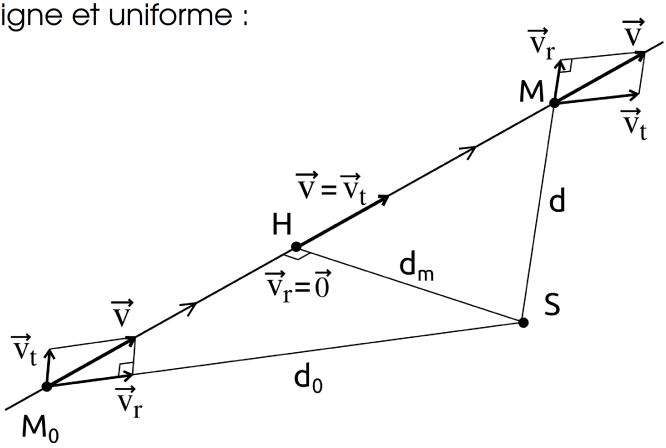
d_0 (al)	v_{r0} (km/s)	$\mu_{\alpha 0}$ (mas/an)	$\mu_{\delta 0}$ (mas/an)	α_0	δ_0
4,244	-22,2	-3781,3	769,8	14h29'43''	-62°40'46''

Déterminez μ, les vitesses tangentielles $v_{t\alpha}$, $v_{t\delta}$, v_t, et la vitesse v de l'étoile Proxima Centauri.

Quelles seront les coordonnées équatoriales de Proxima dans un siècle ?

2 - ▲▲ *Approximation linéaire du mouvement* :

Nous négligeons l'attraction du Soleil et le potentiel gravitationnel galactique[57]. Au premier ordre, le vecteur vitesse de l'étoile peut être considéré comme constant. Le mouvement de l'étoile est alors rectiligne et uniforme :



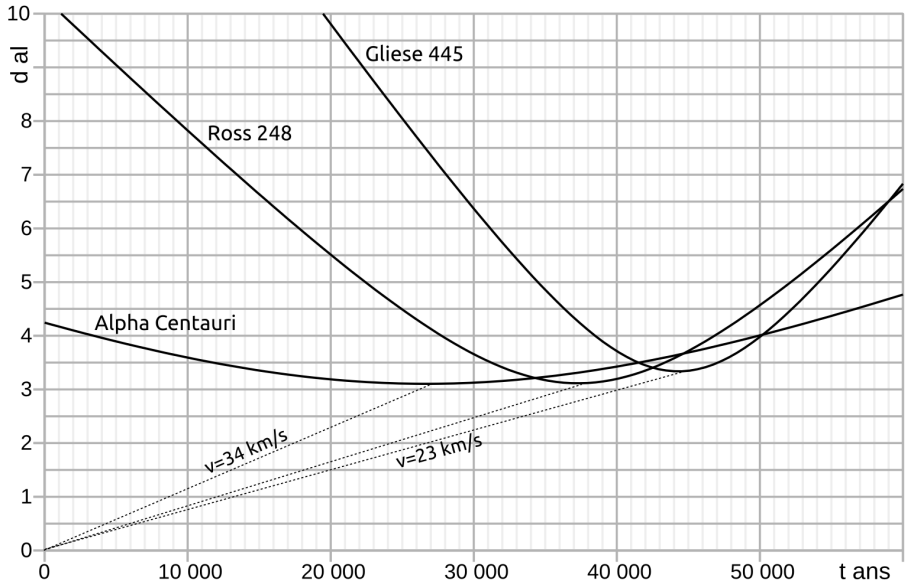
57 *The Close Approach of Stars in the Solar Neighbourhood*, Matthews, 1993. *Close encounters of the stellar kind*, Bailer-Jones, 2014.

a- Déterminez la distance d de l'étoile au Soleil en fonction du temps.

b- Déterminez la distance minimale d'approche d_m et la date t_m correspondante.

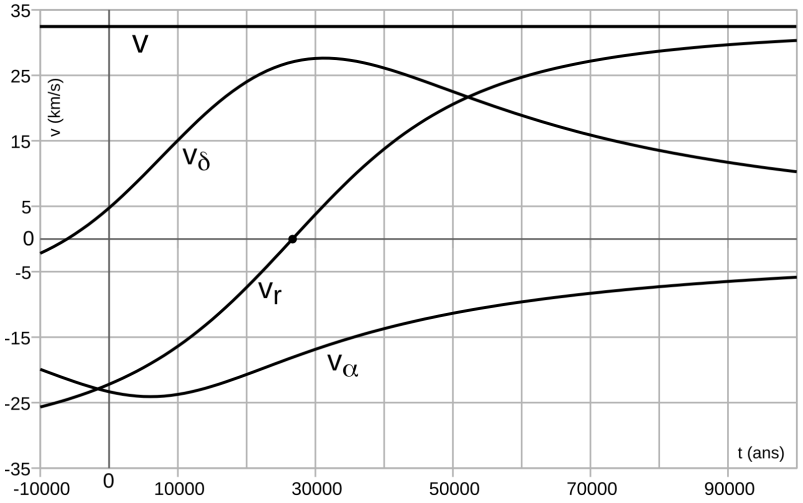
c- Quelles sont les coordonnées de l'étoile à la distance minimale d'approche ?

Évolution de la distance des étoiles



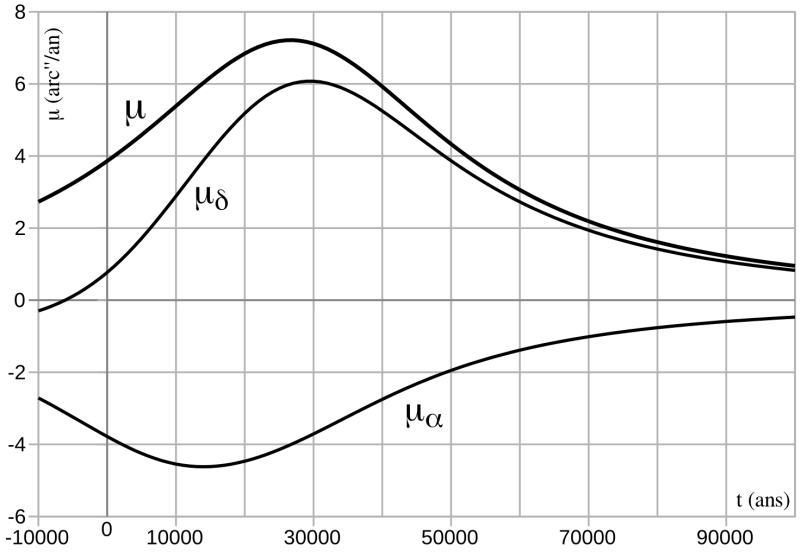
Trois étoiles qui peuvent être rejointes en moins de 50 000 ans par une sonde qui utilise l'assistance gravitationnelle.

Vitesses radiales et tangentielles
de Proxima Centauri

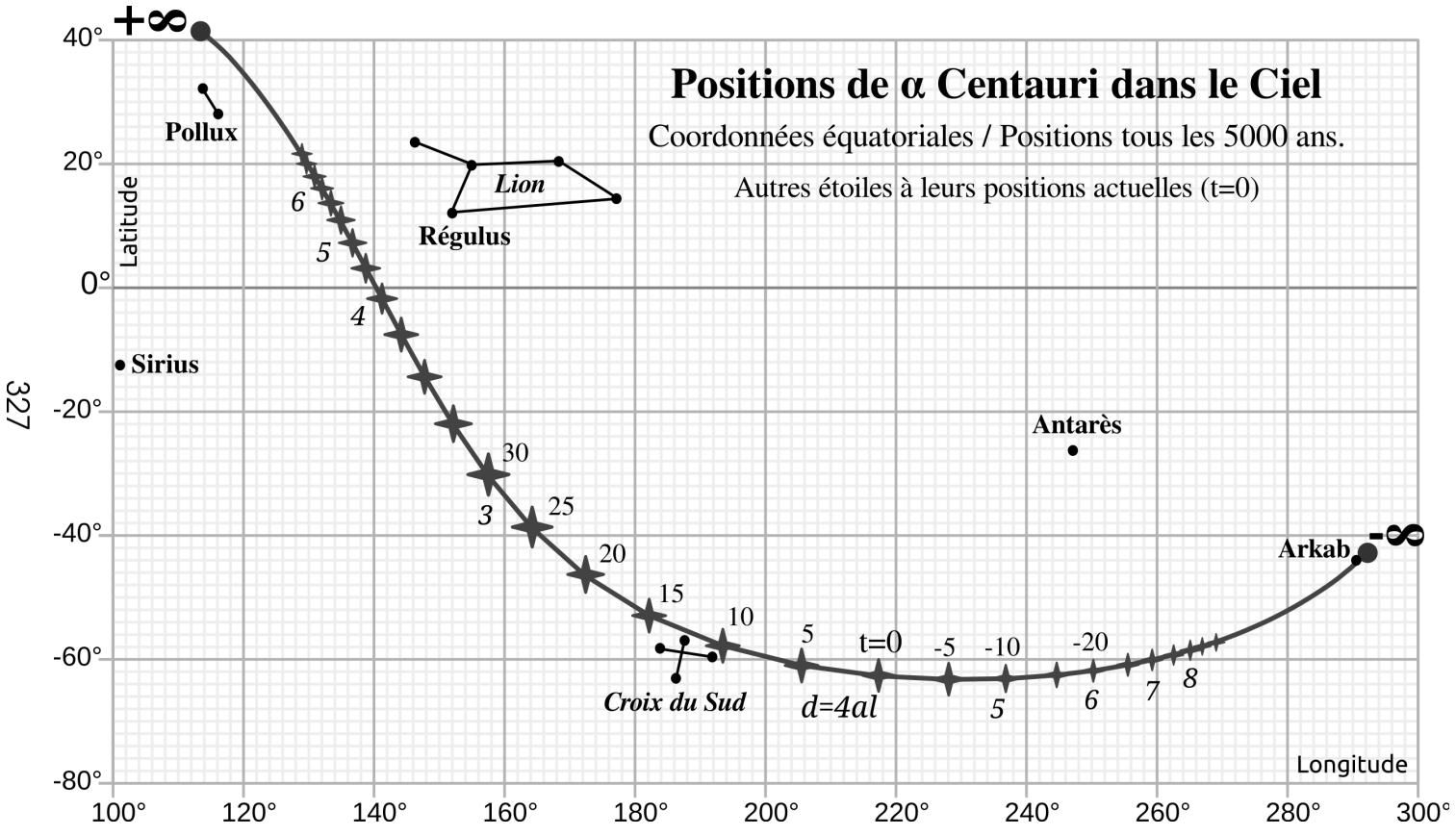


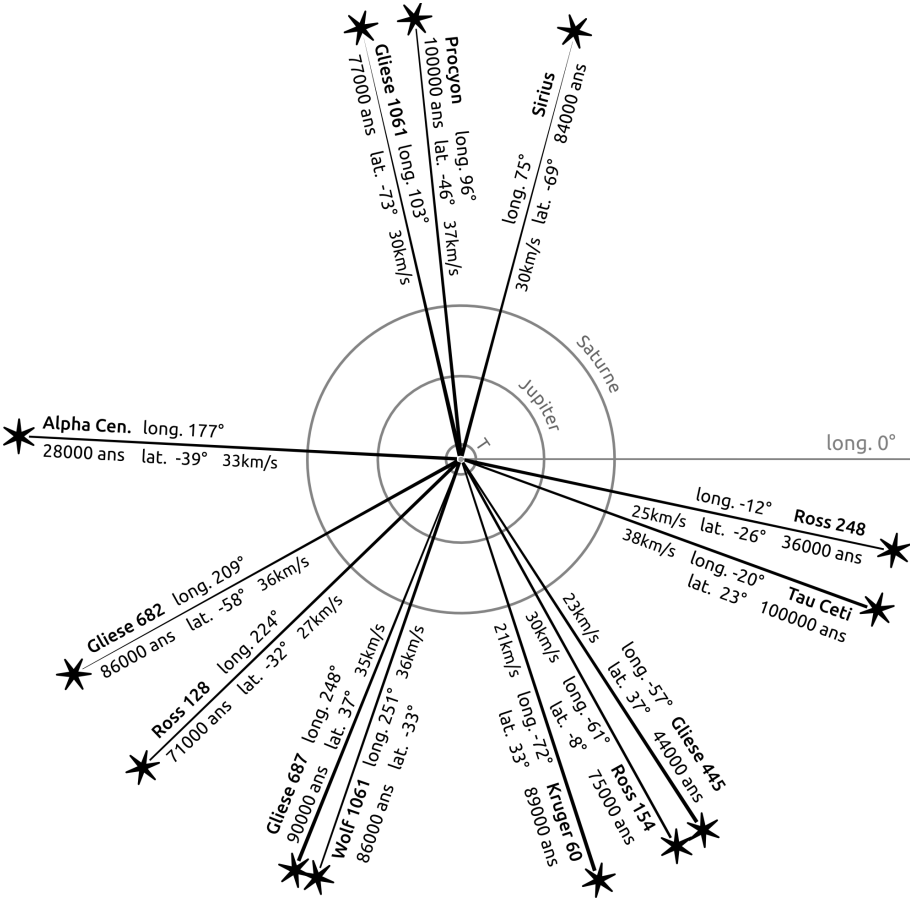
Le mouvement d'une étoile est rectiligne et sa vitesse v est constante. Par contre, ses trois composantes, normales entre elles, varient au cours du temps. Au plus proche, la vitesse radiale s'annule et la vitesse tangentielle est maximale : $v_t = \sqrt{v_\alpha^2 + v_\delta^2}$*. En des temps infinis, la vitesse devient purement radiale et les composantes tangentielles tendent vers zéro.*

Mouvements propres de Proxima Centauri



Mouvement propre d'une étoile pour un observateur terrestre. Nous avons les variations angulaires annuelles sur la sphère céleste en coordonnées équatoriales de la position d'une étoile. Ces mouvements propres ne sont pas constants et varient au cours des millénaires. Les étoiles lointaines peuvent être considérées fixes et plus elles sont proches de notre Soleil plus leur mouvement devient apparent.
Une seconde d'arc = un 3600^{ième} de degré.


Positions de α Centauri dans le Ciel
Coordonnées équatoriales / Positions tous les 5000 ans.
Autres étoiles à leurs positions actuelles (t=0)
+∞
-∞
Pollux
Lion
Régulus
Sirius
Antarès
Arkab
Croix du Sud
d=4al
t=0
Latitude
Longitude
40°
20°
0°
-20°
-40°
-60°
-80°
100°
120°
140°
160°
180°
200°
220°
240°
260°
280°
300°
6
5
4
3
30
25
20
15
10
5
-5
-10
-20
6
7
8
5



La position des étoiles en coordonnées écliptiques au moment où le vaisseau aura rejoint le système stellaire distant. 13 étoiles à moins de 100 000 ans et 40 km/s.

Correction p478.

8.√ ▲▲△ Une paire de trous noirs primordiaux peut-elle être utilisée comme porte des étoiles ?

Des chercheurs expliquent dans un article de 2019[58] comment l'existence de trous noirs primordiaux au-delà de l'orbite de Neptune permettrait d'expliquer, à la fois, les anomalies d'orbites observées pour les objets transneptuniens, et, les excès d'effet de micro-lentilles gravitationnelles observés par l'expérience OGLE[59]. Les trous noirs primordiaux (TNP) auraient été créés dans les premiers moments du Big-bang. Ils pourraient expliquer l'origine des sursauts gamma et une partie de la matière noire. Ces petits trous noirs n'ont pas encore été observés, ils seraient de la taille d'un poing et de quelques masses terrestres.
Dans cet exercice nous supposons l'existence de tels trous noirs au-delà de Neptune, et nous imaginons qu'ils forment parfois des paires en rotation rapide autour de leur barycentre.
Données caractéristiques des TNP : Rayon R=4,5 cm. Masse M=5 M_T. Distance au Soleil D=300 ua.

1 - Montrez comment une telle paire de trous noirs primordiaux permettrait d'atteindre des vitesses vertigineuses par assistance gravitationnelle.
Pourrions-nous, à partir de là, rejoindre Proxima en moins de 50 ans ?

2 - Au plus près des trous noirs primordiaux les forces de marée augmentent. Une mission habitée serait-elle viable ? *Corr. p485.*

58 *What if Planet 9 is a Primordial Black Hole?* J. Scholtz et J. Unwin.
59 *Optical Gravitational Lensing Experiment* est un projet d'astronomie polonais basé à l'Université de Varsovie.

9.√ ▲▲△ Collisions d'antiprotons

1 - Dans un accélérateur de particules quelle doit être la vitesse minimale des protons incidents sur une cible hydrogénée pour créer une paire $p\,\bar{p}$?
Masse d'un proton : 938 MeV/c^2.

2 - La même chose peut se produire avec un antiproton qui entre en collision avec un proton. Les antiprotons du rayonnement cosmique ont-ils des énergies cinétiques suffisantes pour créer des paires ? La quantité de protons cosmiques est bien supérieure à celle des antiprotons. Pourrions-nous obtenir un flux conséquent d'$\bar{p}$ à l'aide de p énergétique ?

Données page 7 de "The discovery of geomagnetically..." et page 13 de "Extraction of particles..." : il y a environ 10 000 fois plus de protons que d'antiprotons sur cette gamme d'énergie.

Corr. p488.

10.√ ▲▲△ Le mouvement hélicoïdal

Cette étude cinématique et géométrique nous aidera à interpréter la dynamique de l'antiproton dans le champ magnétique terrestre.

Équations paramétriques de la trajectoire en coordonnées cartésiennes pour un mouvement hélicoïdal uniforme :

$$\begin{cases} x(t) = r\cos\omega t \\ y(t) = r\sin\omega t \\ z(t) = v_z t \end{cases} \qquad r = cste > 0 \qquad \omega = cste \qquad v_z = cste$$

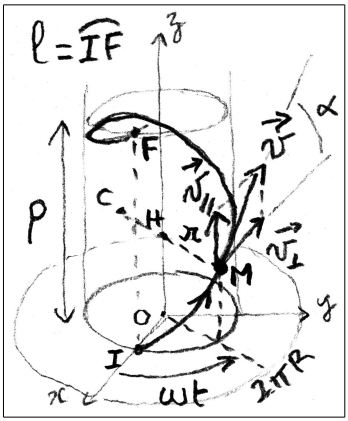
1 - Écrire les équations en coordonnées cylindriques.

2 - Déterminer les composantes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$.

3 - Calcul de v, a, $\frac{dv}{dt}$ et du rayon de courbure R.

4 - Lien entre R, le rayon r de la vis et le pas p de la vis ($|\Delta z|$ sur un tour).

5 - Calcul de la longueur l parcourue par la particule sur un tour en fonction de : r et p, puis de, v et $v_\perp$, et finalement, de R et α (angle entre $\vec{v}$ et l'horizontale).



Correction p489.

11.√ $\frac{01}{10}$ ▲▲▲ La magnétosphère

Les lignes de champs de la magnétosphère terrestre sont analogues à celle d'un aimant droit géant avec son pôle magnétique Sud à proximité du pôle géographique Nord.

1 - Montrer que dans un champ magnétique la vitesse d'une particule est constante.

Aide : En mécanique relativiste $\vec{f}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\,m\gamma\vec{v}}{dt}$ *et nous avons, ici, la force de Lorentz* $\vec{f}=q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$.

Pour l'aspect énergétique $\vec{f}\cdot\vec{v}=\frac{dE}{dt}$ *avec* $E=T+mc^2$.

2 - Donnez la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme.

3 - Donnez l'allure des lignes de champs d'un dipôle magnétique. Caractéristiques et composantes du champ magnétique d'un dipôle en coordonnées sphériques.

4 - Montrez l'effet de miroir sur l'exemple d'un tube de champs qui se resserre.

5 - Montrez le phénomène de dérive dans le cas simple de deux zones avec des champs magnétiques uniformes d'intensités différentes.

6 - Antiproton piégé : Nous allons réaliser une simulation numérique avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (méthode décrite page 313).

a- Établir l'expression des composantes du champ magnétique d'un dipôle en coordonnées cartésiennes.

b- Donner les équations du mouvement d'une particule chargé dans un champ magnétique.

c- Écrire le schéma RK4.

d- Réaliser la simulation numérique. Sur un tableur ça peut être trop gourmand en calcul. Nous avons dans ce cas préféré programmer en php et effectuer les calculs sur serveur.

Corr. p490.

12.√ ▲▲▲ Piège de Penning

Ce piège à particules chargées, conçu en 1936, utilise un champ électrique quadripolaire et un champ magnétique uniforme. Les pièges de Penning sont couramment utilisés au CERN pour stocker des antiprotons. Le champ électrique est créé par un ensemble d'électrodes qui épousent les équipotentielles en forme d'hyperboloïde du quadripôle. Le champ magnétique globalement uniforme dans la zone de stockage est celui créé à l'intérieur d'un solénoïde.

1 - Expression du champ électrique :

$$\vec{E}=\frac{U_0}{r_0^2}(-x\,\vec{i}-y\,\vec{j}+2\,z\vec{k})$$

Montrez que $\vec{E}$ dérive d'un potentiel que l'on déterminera.

2 - Démontrez que l'origine O est une position d'équilibre. Discutez de la stabilité selon l'axe (Oz) puis selon le plan (Oxy). Calculez la pulsation ω_z des oscillations selon Oz.

3 - Pour stabiliser la trajectoire de l'antiproton nous superposons un champ magnétique uniforme :

$$\vec{B}=B_0\,\vec{k}$$

a - Le mouvement selon (Oz) est-il modifié ?

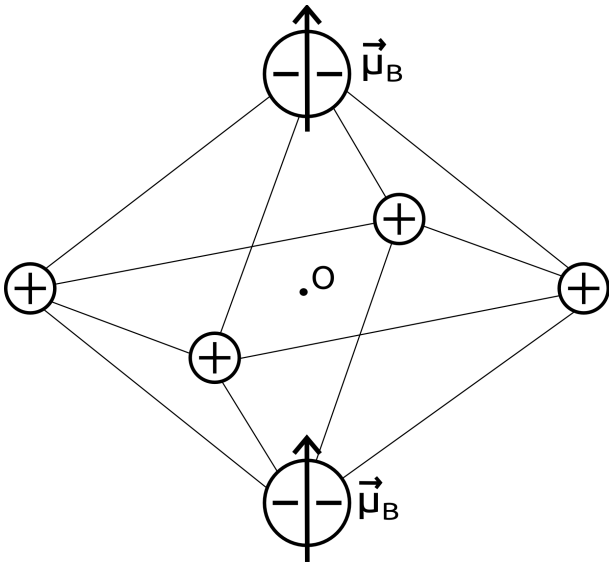
b - Selon (xOy) : montrez que l'antiproton est piégé si B_0 est supérieur à une valeur critique B_c à déterminer (pour cela établir l'équation différentielle vérifiée par $\rho=x+j\,y$, $j^2=-1$, on pose $\omega_c=e\,B_0/m$).

c - Résoudre et mettre en évidence deux pulsations ω_c' et ω_m (pulsation magnétron).
Applications numériques : U_0=9,3 V, r_0=29,1 cm, B_0=0,55 T, $e=1{,}6.10^{-19}$C, $m_p=1{,}67.10^{-27}$kg.

d - Tracez l'allure de la trajectoire.

4 - Cage microscopique : Pourrions-nous créer un piège de Penning à l'échelle microscopique ? Nous allons proposer un modèle pour tenter de donner des éléments de réponse. Pour le champ électrique quadripolaire nous pouvons utiliser des cations et des anions. Pour le champ magnétique nous avons des atomes paramagnétiques qui possèdent un moment magnétique permanent (le fer en est un exemple parmi tant d'autres). Prenons six atomes disposés selon une bipyramide à base carré. Les deux atomes aux sommets ont une charge $2\ominus$ et un moment magnétique élémentaire μ_B. Les quatre atomes de la base sont des cations de charge élémentaire $\oplus$.

Données (ordre de grandeurs habituels) :
Arêtes de l'octaèdre régulier égales à a=100 pm.
Charge élémentaire $e=1{,}6.10^{-19}$ C. $\varepsilon_0=8{,}85.10^{-12}$ $C^2.m^{-2}.N^{-1}$.
Moment magnétique élémentaire : celui créé par un électron classique qui tourne dans un atome d'hydrogène, appelé magnéton de Bohr :
$\mu_B=9{,}27.10^{-24}A.m^2$. Tous les moments magnétiques atomiques valent quelques magnétons élémentaires (moments orbitaux et de spin combinés).



Représentation d'un piège de Penning microscopique hypothétique au sein d'un réseau cristallin ou d'une structure moléculaire. Les atomes paramagnétiques placés en haut et en bas créent un champ magnétique globalement uniforme autour du centre O. Ces atomes aux sommets de la bipyramide correspondent aux coupelles supérieure et inférieure d'un piège de Penning macroscopique, et les cations de la base carré, à l'électrode latérale torique.

a - Montrez que cet édifice atomique n'est pas un monopôle, ni un dipôle électrique.

b - Évaluez le champ magnétique B_0 créé au centre de la bipyramide. Vous pourrez utiliser les expressions page 491.

c - Estimez le facteur U_0/r_0^2.
Vous pouvez considérer l'axe Oz pour identifier les expressions.

d - Le champ magnétique est-il suffisant pour piéger un antiproton ? Conclusions.

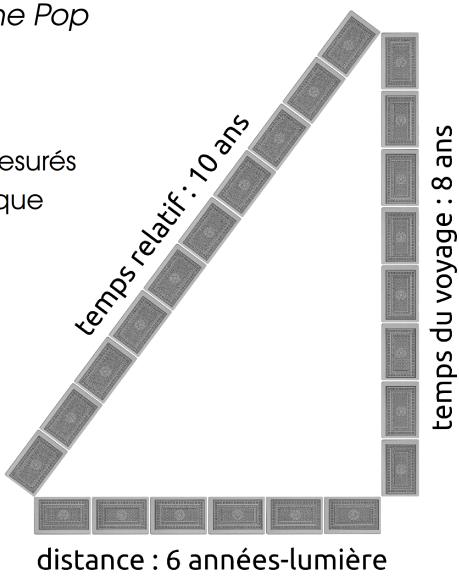
Corr. p507.

Corrections

1 .1. *Les cristaux de l'exolune Pop (système de Barnard)*

Énoncé p25.

Distance et temps relatif mesurés dans le référentiel galactique *R'*.
Arrivée en l'année galactique **2120** (=2010 + 10).
Vitesse de la fusée dans *R'* :
$v = 6/10\ c$
soit **60% de *c***.

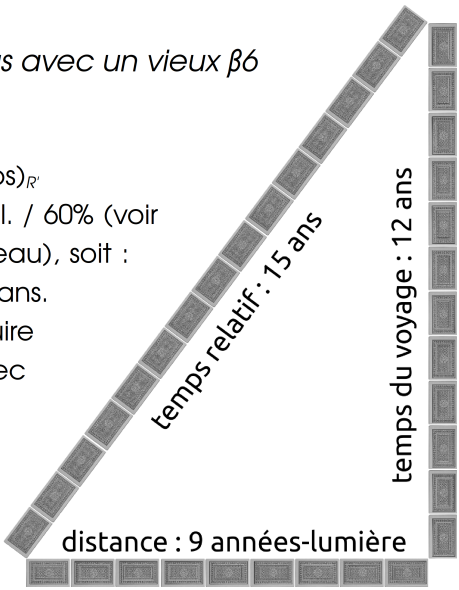


C'est un triangle double du 3-4-5.

2. *Aller simple pour Sirius avec un vieux β6*

(Énoncé p26)

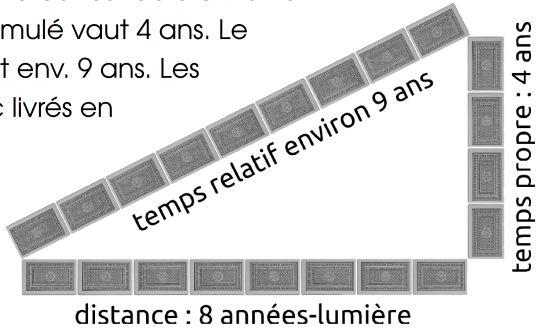
vitesse = $(\text{distance} / \text{temps})_{R'}$
d'où : temps relatif = 9 a.l. / 60% (voir caractéristiques du vaisseau), soit :
$\Delta t' = 9 / 0{,}6 = 9\text{x}10/6 = 15$ ans.
Nous essayons de construire un triangle des temps avec une base de 9 cartes et une hypoténuse de 15 cartes. Le temps propre vaut 12 ans.
Arrivée à **42 ans**



(=30+12). Date d'arrivée : 2169 (2154 + 15). Vous arrivez un an après le premier festival, vous devez attendre celui de **2178**.
C'est un triangle triple du 3-4-5.

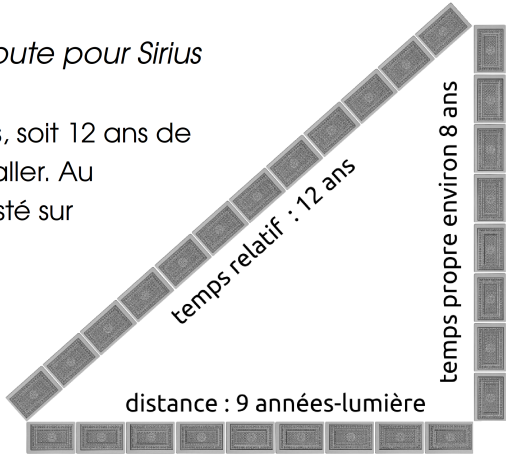
1. 3. *Livraison de colis (Énoncé p26)*

La distance aller-retour est de 8 a.l. et le temps propre cumulé vaut 4 ans. Le temps relatif vaut env. 9 ans. Les clients sont donc livrés en **4 ans et demi**, la vitesse du vaisseau par rapport au référentiel galactique est de 8/9 ≃ **89% de *c***, et la dilatation temporelle est de 9/4 ≃ **2,2**.



1. 4. *Jumeau en route pour Sirius*

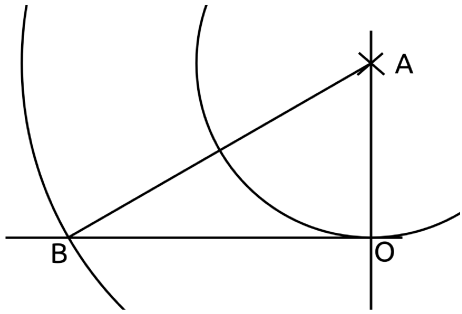
Énoncé p26.
2156 - 2132 = 24 ans, soit 12 ans de temps relatif pour l'aller. Au retour, le jumeau resté sur Terre a **44 ans**, et le jumeau voyageur a **36 ans** (20 + 8x2). Vitesse de la fusée : 9/12 soit **75% de *c***.



1. 5. *Cruel dilemme ?* *(Énoncé p27)*

Si Denys reste chez lui, dans le centre galactique, il mourra en 3053, impossible donc d'assister à la fête. De plus, s'il ne désamorce pas la bombe, elle explosera en 3052 et suite à la propagation des rayons gamma le centre de la galaxie sera détruit 26 ans plus tard en 3078, donc pas de fête non plus...

Par contre, si Denys voyage avec une dilatation de deux, pour 32 ans de vie dans le vaisseau, il s'écoule 64 ans en temps galactique.



Considérons que Denys parte désamorcer la bombe, son temps relatif AB est le double du temps propre AO, et BO vaut 26 a.l.

Construction : on trace une droite verticale, on fixe un point A, on trace un cercle de rayon arbitraire, par exemple 5 cm. On obtient un point O, on y trace une droite perpendiculaire. On trace un deuxième cercle de rayon double 10 cm. On mesure la distance BO ≃ 8,7 cm.

5 cm	? ans
10 cm	? ans
8,7 cm	26 a.l.

Le temps propre vaut donc :

5 / 8,7 x 26 ≃ 15 ans.

Et 30 ans pour le temps relatif.

Denys arrive à temps pour désamorcer la bombe, en 3051. Ensuite il est de retour au centre galactique 60 ans plus tard en 3081, un an avant la fête. Et il n'est pas encore mort car il n'a vieilli que de 30 ans, il mourra en 3083 et pourra donc assister à la fête de 3082 !

1. 6. *Les muons* *(Énoncé p28)*

Un muon immobile se désintègre en 1,5 µs, la demie-vie est donc un temps propre. Nous pouvons nommer *R* le référentiel propre lié au muon (solide de référence).
Le référentiel terrestre nommé *R'* est en translation rectiligne et uniforme par rapport à *R,* à la vitesse v = 0,999 *c*. Sur la durée, courte, de l'expérience *R'* est un très bon référentiel d'inertie, et *R*, de ce fait, aussi.
Le temps relatif de désintégration du muon vaut :

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \text{or} \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\text{d'où, ici,} \quad \gamma = 1/\sqrt{1-0{,}999^2} \simeq 22{,}4$$

Le temps de demie-vie dans le référentiel terrestre est 22 fois supérieur à celui dans son référentiel au repos.
La distance parcourue par le muon dans le référentiel terrestre pendant son temps de demi-vie relatif est :

$$d = v\,\Delta t' = \beta\, c\, \gamma\, t_{1/2} \simeq 10\,km$$

Environ **la moitié de ces muons arrivent au niveau du sol**, l'autre moitié se sera désintégrée, avant, en altitude.

Dans le contexte de la mécanique classique, ou si l'on oublie de tenir compte de la dilatation du temps, les muons auraient 1,5 µs au lieu de 33,5 µs pour atteindre le sol. Ainsi, après 450 mètres parcourus la moitié se seraient déjà désintégrés. Après 900 m seulement le quart seraient encore là, et au sol, après 10 km, un sur 2^{22} aurait survécu... Finalement, un tel muon n'auraient qu'une chance sur quatre millions d'arriver au sol, ce qui est très différent d'une chance sur deux !
Les muons ont été découverts en 1936. La mesure du flux de muons en fonction de l'altitude a permis de vérifier la validité de la relativité restreinte.

1. 7. *Voyage en TGV* *(Énoncé p29)*

La vitesse moyenne du train vaut :

$$v = d/t = 2300/8 = 287{,}5\ km/h \simeq 79{,}86\ m/s$$

Cette vitesse est infime devant celle de la lumière, gamma est très proche de un, et un calcul du γ avec une calculatrice standard vous donnera 1, comme s'il n'y avait pas de dilatation du temps. Or, comme nous allons le voir, cette dilatation est très facile à mesurer avec des horloges atomiques.
Pour des vitesses faibles devant la vitesse maximale, il est plus pratique et parlant d'utiliser des développements limités :

$$\Delta t' = \gamma\,\Delta t = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}\Delta t \simeq \left(1+\beta^2/2\right)\Delta t$$

La différence de temps entre l'horloge restée à Pékin et celle qui a parcouru 4600 km vaut :

$$\Delta t' - \Delta t \simeq \left(1+\beta^2/2\right)\Delta t - \Delta t = \beta^2/2\,\Delta t = \frac{v^2}{2c^2}\Delta t$$

D'où une différence pour les 16 heures d'aller-retour :

$$\Delta t' - \Delta t \simeq \frac{79{,}86^2}{2\left(3.10^8\right)^2} 16\times 60\times 60 \simeq 2{,}04\ ns$$

L'horloge restée en gare est en avance de **deux nanosecondes** par rapport à celle qui a voyagé.

Vérifions si nos horloges sont assez précises : une dérive de 10^{-14} seconde par seconde donne, pour un voyage de 57600 secondes, une dérive de 0,6 ns. L'incertitude est faible par rapport à la différence mesurée : la dilatation du temps est confirmée.

1. 8. *Satellite basse altitude* *(Énoncé p29)*

Nous ajoutons les temps propres sur un tour. Nous calculons la durée d'un tour :

$$\Delta t = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \times 6900.10^3 \times 3{,}6}{27000} \simeq 5781\, s \simeq 1\, heure\, 36\, minutes$$

D'où la différence de temps suivante entre les deux horloges (même formules qu'à l'exercice précédent):

$$\Delta t' - \Delta t \simeq \frac{v^2}{2c^2}\Delta t \simeq \frac{(27000/3{,}6)^2}{2\times 9.10^{16}} 5781 \simeq 1{,}8\,\mu s$$

L'horloge dans le satellite est plus jeune de **1,8 µs** par rapport à celle restée immobile dans le référentiel géocentrique.
Nous pouvons réaliser un développement limité, car la vitesse du satellite est très petite devant la vitesse limite (un quarante millième de *c*).

1. 9. *Expérience de Hafele et Keating* *(Énoncé p30)*

Deux sources de dilatation du temps sont, ici, présentes : la vitesse et la gravitation. Dans un avion, la vitesse augmente et la gravitation diminue. Les deux effets y agissent en sens inverse. L'*hypothèse de l'horloge* se généralise et le temps Δt ' passé dans l'avion, référentiel *R'*, par rapport à celui Δt pour une horloge immobile dans le référentiel géocentrique *R*, s'écrit :

$$\Delta t' \simeq \left(1 + \frac{gh}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right)\Delta t \quad \text{soit} \quad \Delta t' - \Delta t \simeq \left(gh - \frac{v^2}{2}\right)\frac{\Delta t}{c^2}$$

Vers l'est, les vitesses s'ajoutent et nous avons la différence de temps suivante :

$$\Delta t' - \Delta t \simeq \left(9{,}81 \times 10000 - \frac{(2674/3{,}6)^2}{2} \right) \frac{40 \times 3600}{9.10^{16}} \simeq -284\, ns$$

Vers l'ouest, les vitesses se soustraient et nous avons la différence de temps :

$$\Delta t' - \Delta t \simeq \left(9{,}81 \times 10000 - \frac{(674/3{,}6)^2}{2} \right) \frac{40 \times 3600}{9.10^{16}} \simeq 129\, ns$$

De plus, la différence entre l'horloge au sol, référentiel terrestre *R''*, et celle immobile dans le référentiel géocentrique *R*, est :

$$\Delta t - \Delta t'' \simeq \frac{(1674/3{,}6)^2}{2} \frac{40 \times 3600}{9.10^{16}} \simeq 173\, ns$$

Nous ajoutons les relations membre à membre :

Vers l'est : $\Delta t' - \Delta t'' \simeq 173 - 284 \simeq -111\, ns$.
L'horloge au sol avance de **111 ns**.

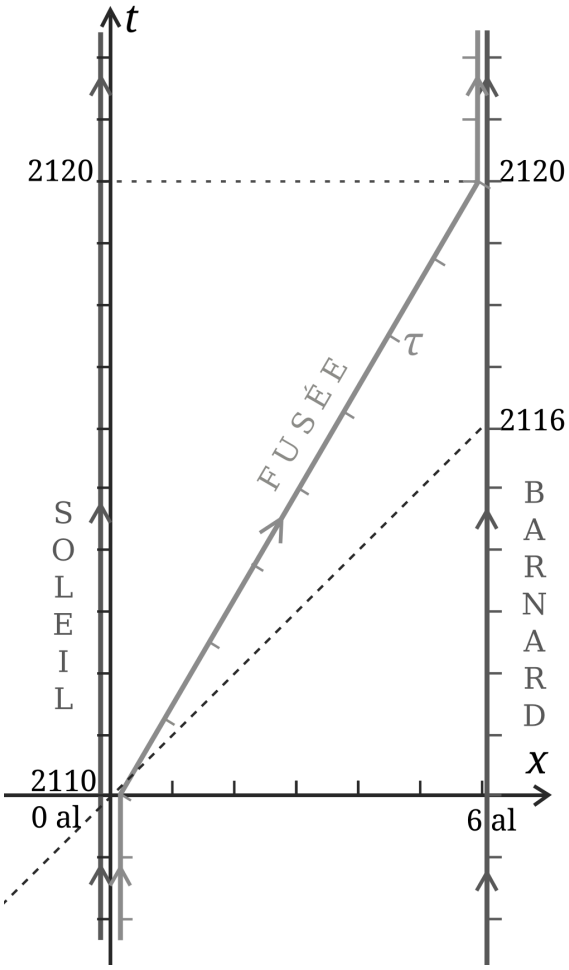
Vers l'ouest : $\Delta t' - \Delta t'' \simeq 173 + 129 \simeq 302\, ns$.
L'horloge au sol retarde de **302 ns**.

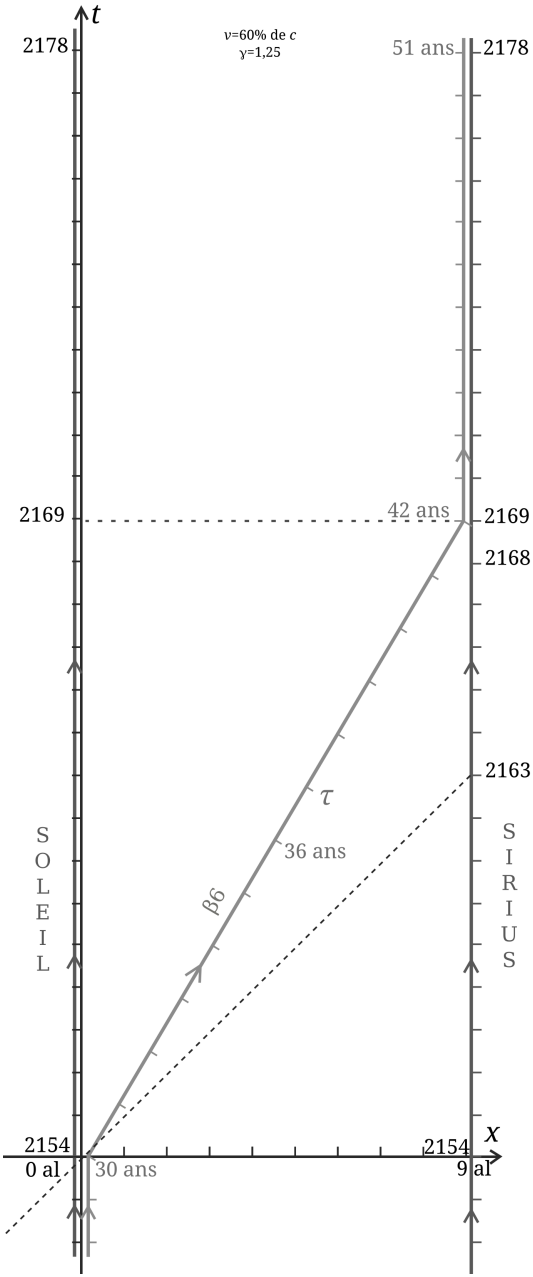
Nos résultats obtenus avec notre modèle simple sont conformes à ceux de l'expérience de 1971.
Il est normal que les résultats diffèrent, les vols réels, avec de multiples escales, n'étaient que globalement équatoriaux, les vitesses et altitudes avaient des valeurs moyennes différentes de celles choisies dans l'énoncé.

2.1.

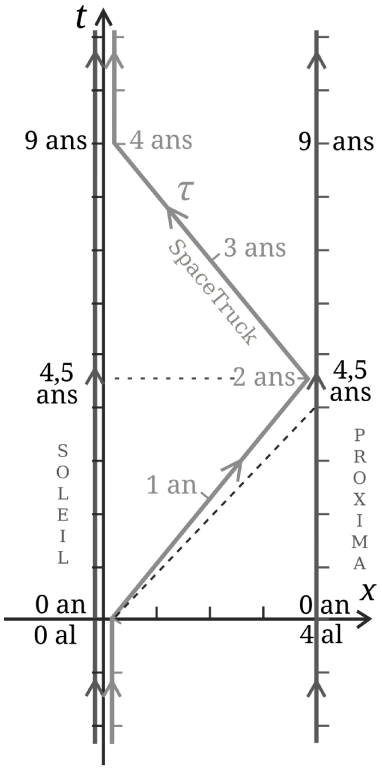
Énoncé p45.

" Les cristaux de l'exolune Pop "

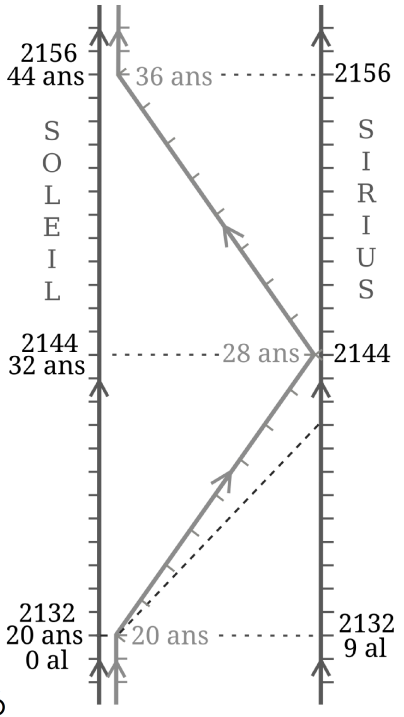




" Un vaisseau spacieux et confortable pour aller au festival des deux soleils "

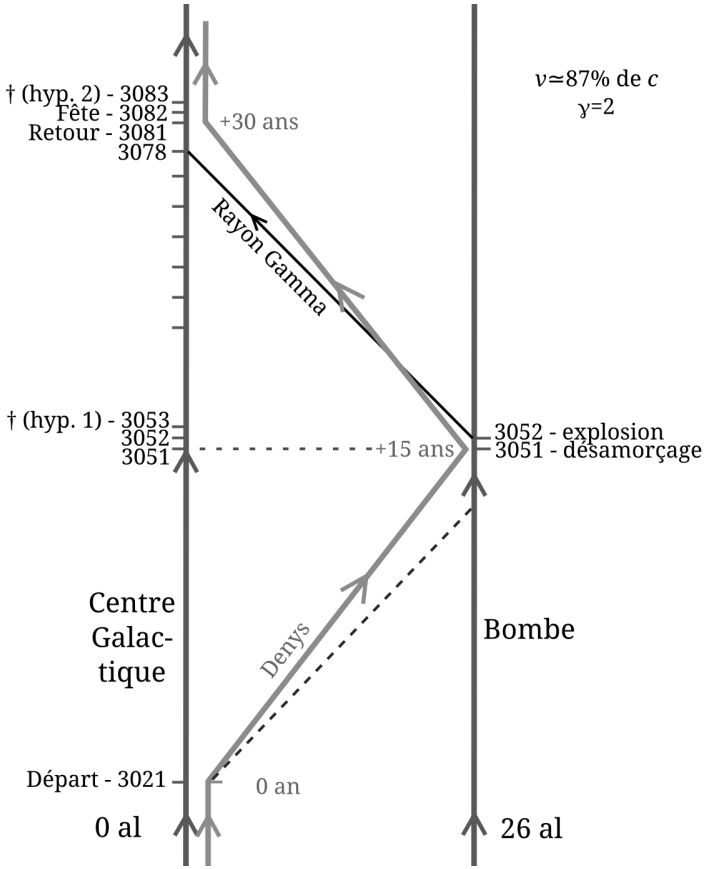


" *Livraison de colis en SpaceTruck* "



" *Les jumeaux* "

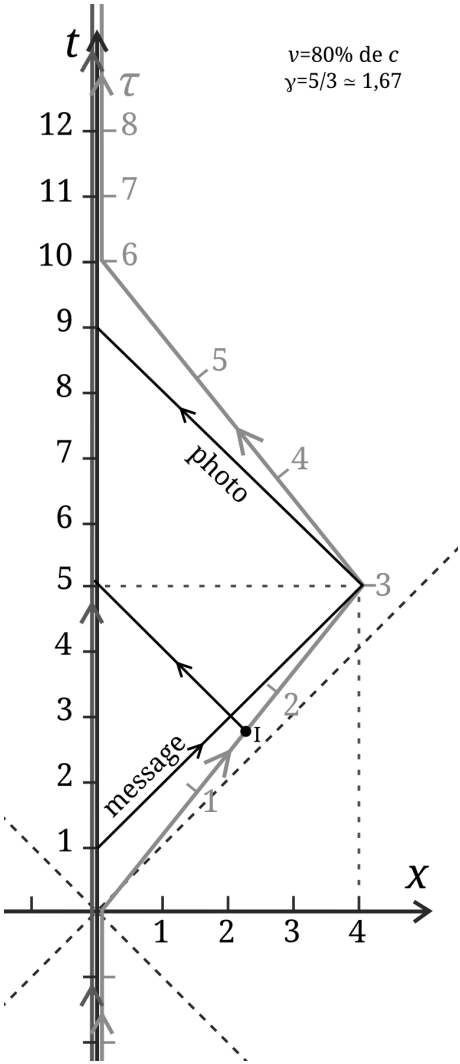
" Denys mourra dans 32 ans exactement,
et il n'y a aucun remède... "



2.2. Communications interstellaires

Énoncé p45.

Raisonnons depuis le référentiel galactique, au moment où le jumeau voyageur se pose sur l'exoplanète, il s'est, depuis le départ, écoulé 5 ans pour le jumeau sur Terre, le rayon lumineux met alors 4 ans de plus pour parvenir jusqu'à la Terre - la vitesse de la lumière dans le vide est indépendante du référentiel d'inertie- et la photo est reçu 9 ans après le départ et 1 an seulement avant le retour !



Bien que l'atterrissage et cinq ans indiqués sur l'horloge terrestre soient des événements simultanés dans le référentiel galactique, l'information se propage à vitesse finie et il faut attendre avant que les images parviennent... Et ici 4 ans aussi de propagation, dans son télescope, donc, le jumeau verra son frère aproximir et recevra la photo en même temps, soit 9 ans après le départ.

Maintenant, si le jumeau sur Terre regarde dans son télescope à la date t=5, il verra des photons émis antérieurement, il ne verra pas du tout son frère atterrir sur Proxima b (même si c'est ce qu'il fait effectivement à ce moment-là), il le verra dans son vaisseau en route pour Proxima, 1 an et 8 mois avant son arrivée en *terra incognita*.

Ce résultat est donné par le calcul du point d'intersection des deux droites :

ligne d'univers du vaisseau : $t=\frac{1}{\beta}\frac{x}{c}$

ligne d'univers du photon : $t=-\frac{x}{c}+t_P$ avec $t_P=5$

Soit pour le point d'intersection I : $t_I = \frac{t_P}{1+\beta}$ d'où $\tau_I = \frac{t_I}{\gamma} = \frac{5}{3}$

Pour qu'au moment de l'atterrissage un message soit reçu depuis la Terre, celui-ci doit être envoyé à l'avance, un an seulement après le départ.

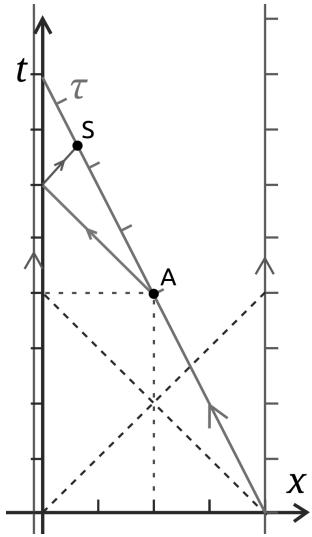
2.3. Appel au secours

Énoncé p46.

Notations :

Vitesse par rapport à *c* du vaisseau de croisière : $\beta_1 = 0{,}5$

Vitesse de la navette de secours : $\beta_2 = 0{,}9$



Lignes d'univers :

Vaisseau : $c\,t = -\frac{1}{\beta_1}(x - D)$

Photons messagers :

$$c\,t = -x + \frac{D}{2\beta_1} + \frac{D}{2}$$

Navette : $c\,t = \frac{1}{\beta_2}x + \frac{D}{2\beta_1} + \frac{D}{2}$

Coordonnées du point S :

$$-\frac{1}{\beta_1}x_S + \frac{D}{\beta_1} = \frac{1}{\beta_2}x_S + \frac{D}{2\beta_1} + \frac{D}{2} \quad \text{d'où} \quad x_S = \frac{\beta_2(1-\beta_1)}{\beta_1+\beta_2}\frac{D}{2}$$

$$\text{et} \quad c\,t_S - ct_A = \left[-\frac{1}{\beta_1}\frac{\beta_2(1-\beta_1)}{\beta_1+\beta_2}\frac{D}{2} + \frac{D}{\beta_1}\right] - \left[\frac{D}{2\beta_1}\right]$$

$$\text{soit} \quad c\,\Delta t_{AS} = \frac{D}{2}\frac{1+\beta_2}{\beta_1+\beta_2} \quad \text{et} \quad \tau_{AS} = \frac{\Delta t_{AS}}{\gamma_1} = \frac{D}{2c}\frac{1+\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\sqrt{1-\beta_1^2}$$

Application numérique : $\tau_{AS} \simeq 2{,}35\,ans$

Les passagers doivent attendre deux ans et quatre mois avant l'arrivée des secours !

2.4. Tim, Tam, Tom

Énoncé p46.

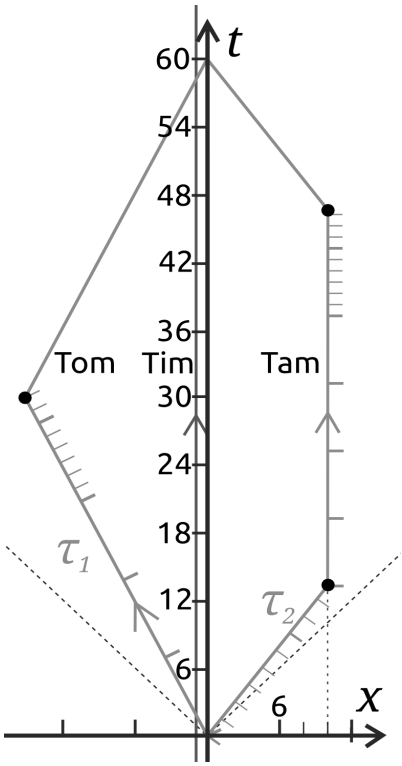
Notations :

Vitesse par rapport à *c* de Tim : $\beta_1=\frac{v_1}{c}=\frac{10}{20}=0{,}5$

Vitesse de Tam :

$$\beta_2=\frac{v_2}{c}=\frac{15}{20}=0{,}75$$

Pour Tom, il suffit d'appliquer le facteur de dilatation temporelle $\gamma_1\simeq 1{,}1547$ et $\tau_1=\frac{\Delta t}{\gamma_1}\simeq 51{,}96\,min$ soit une arrivée à 10h52 à sa montre.



Pour Tam en vélo $\gamma_2\simeq 1{,}5119$.

Pour l'aller, $\Delta t=\Delta x/\beta_2\simeq 13{,}3\,min$ et $\tau_2=\frac{\Delta t}{\gamma_2}\simeq 8{,}82\,min$ soit une arrivée à 10h51 à sa montre.

3.1. Composition des vitesses

Énoncé p71.

a - 80% de *c*. b - 50% de *c*.

2. Deux vaisseaux

Énoncé p71.

a - En pratique nous ne connaissons pas la position d'un objet en continu mais par intervalles réguliers. Nous estimons les vitesses et accélérations d'un point en utilisant des valeurs moyennes à l'aide des points voisins. Par exemple, sur une table à coussin d'air, avec une vidéo, ou un radar, nous avons de telles mesures.

Vitesse moyenne entre deux points M_n et M_{n+1} d'une trajectoire :

$$\vec{v}_{n\ n+1} \simeq \frac{\overrightarrow{M_n M_{n+1}}}{t_{n+1}-t_n} \simeq \frac{\overrightarrow{OM_{n+1}}-\overrightarrow{OM_n}}{\Delta t_{n\ n+1}} .$$

Vitesse estimée à la date intermédiaire :

$$t_{n\ n+1} = \frac{t_{n+1}+t_n}{2} .$$

- Entre t_1 et t_2 : $t_{12} = (t_2+t_1)/2 = 2$ et $\Delta t_{12} = t_2 - t_1 = 4$

$$\vec{v}_{A12} \simeq (x_{A2}-x_{A1}, y_{A2}-y_{A1}, z_{A2}-z_{A1})/\Delta t_{12}$$

d'où : $\vec{v}_{A12} \simeq (1/2, 0, 0)$ et $v_{A12} \simeq 1/2$

soit $\beta_{A12} \simeq 1/2$ et $\gamma_{A12} \simeq 2/\sqrt{3}$.

Les vitesses ne sont pas ici exprimées dans le système international en m/s, mais dans leurs unités naturelles en al/an, soit en pourcentage de *c*.

$$\vec{v}_{B12} \simeq (4-2,2,2)/4 \quad \text{soit} \quad \vec{v}_{B12} \simeq (1/2,1/2,1/2) .$$

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} \quad \text{d'où} \quad v_{B12} \simeq \sqrt{3}/2$$

$$\text{soit} \quad \beta_{B12} \simeq \sqrt{3}/2 \simeq 0{,}866 \quad \text{et} \quad \gamma_{B12} \simeq 2 .$$

- Entre t_2 et t_3 : $t_{23} = 6$, $\Delta t_{23} = 4$ et $\vec{v}_{A23} = \vec{v}_{A12}$

$$\vec{v}_{B23} \simeq (1/4,1/4,1/4) \quad \text{d'où} \quad v_{B23} \simeq \sqrt{3}/4$$

$$\text{soit} \quad \beta_{B23} \simeq \sqrt{3}/4 \simeq 43\% \quad \text{et} \quad \gamma_{B23} \simeq \sqrt{16/13} \simeq 1{,}11 .$$

b -

Accélération moyenne

entre les instants $t_{n\,n+1}$ et $t_{n+1\,n+2}$:

$$\vec{a} \simeq \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{d'où} \quad \vec{a}_{n\ n+2} \simeq \frac{\vec{v}_{n+1\ n+2} - \vec{v}_{n\ n+1}}{t_{n+1\ n+2} - t_{n\ n+1}} .$$

Accélération estimée à la date intermédiaire :

$$t_{\text{int}} = \frac{t_{n+1\ n+2} + t_{n\ n+1}}{2} \text{ , de plus } \Delta t = t_{n+1\ n+2} - t_{n\ n+1} .$$

- Entre t_1 et t_3 pour *A* : $\vec{a}_A \simeq \vec{0}$.

- Entre t_1 et t_3 pour *B* : $t_{\text{int}} = 4$ et $\Delta t = 4$,

$$\vec{a}_B \simeq (1/4 - 1/2, -1/4, -1/4)/4$$

d'où $\vec{a} = \vec{a}_B \simeq (-1/16, -1/16, -1/16)$ (décélération)

$$a = a_B \simeq \sqrt{3}/16 \simeq 0{,}108 \ al/an^2$$

c - Tout référentiel en translation, rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est aussi d'inertie. Le solide de référence du vaisseau a un mouvement de translation, rectiligne et uniforme

par rapport au référentiel *R* (le vecteur vitesse du point A est considéré constant dans *R*). Comme *R* est d'inertie *R'* l'est aussi.

Au vu des trois événements dont nous disposons, la trajectoire du vaisseau *B* dans *R* peut être rectiligne (les trois positions fournies sont alignées).

Déterminons maintenant les coordonnées des événements de *B* dans *R'* en utilisant la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} x'_B/c=\gamma(x_B/c-\beta t) \\ y'_B=y_B \\ z'_B=z_B \\ t'=\gamma(t-\beta x_B/c) \end{cases} \quad \text{Pour } t_1=0 : \quad \begin{cases} x'_B=\frac{2}{\sqrt{3}}(2-0) \\ y'_B=2 \\ z'_B=2 \\ t'_1=\frac{2}{\sqrt{3}}(0-\frac{1}{2}2) \end{cases}$$

D'où : $E_{R',B,1}(x'_B=\frac{4}{\sqrt{3}}, y'_B=2, z'_B=2, t'_1=-\frac{2}{\sqrt{3}})$

$$\text{Pour } t_2=4 : \quad \begin{cases} x'_B=\frac{2}{\sqrt{3}}(4-\frac{1}{2}4) \\ y'_B=4 \\ z'_B=4 \\ t'_2=\frac{2}{\sqrt{3}}(4-\frac{1}{2}4) \end{cases}$$

D'où : $E_{R',B,2}(x'_B=\frac{4}{\sqrt{3}}, y'_B=4, z'_B=4, t'_2=\frac{4}{\sqrt{3}})$

Pour $t_3=8$: $\begin{cases} x'_B=\frac{2}{\sqrt{3}}(5-\frac{1}{2}8) \\ y'_B=5 \\ z'_B=5 \\ t'_3=\frac{2}{\sqrt{3}}(8-\frac{1}{2}5) \end{cases}$

D'où : $E_{R',B,3}(x'_B=\frac{2}{\sqrt{3}}, y'_B=5, z'_B=5, t'_3=\frac{11}{\sqrt{3}})$

Deux remarques concernant la ligne d'univers du vaisseau *B* interprétée depuis *R'* : d'une part les trois événements ne sont plus séparés par des intervalles de temps égaux comme depuis *R*. et d'autre part, la partie spatiale projetée dans *R'* correspond à des points non alignés, contrairement à *R*.

d - $\vec{v}'_{B12}\simeq(x'_{B2}-x'_{B1}, y'_{B2}-y'_{B1}, z'_{B2}-z_{B1})/\Delta t'_{12}$

$\vec{v}'_{B12}\simeq(0,2,2)\sqrt{3}/6$ soit $\vec{v}'_{B12}\simeq(0,\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3)$

à $t'_{12}=(t'_1+t'_2)/2=1/\sqrt{3}$ avec $\beta'_{B12}\simeq\sqrt{2/3}\simeq 0{,}816$

$\vec{v}'_{B23}\simeq(-2/\sqrt{3},1,1)\sqrt{3}/7$ soit $\vec{v}'_{B23}\simeq(-\frac{2}{7},\frac{\sqrt{3}}{7},\frac{\sqrt{3}}{7})$

à $t'_{23}=\frac{15}{2\sqrt{3}}$ avec $\beta'_{B23}\simeq\frac{\sqrt{10}}{7}\simeq 0{,}452$

e - $\vec{a}'=\vec{a}'_B\simeq(-2/7,-4\sqrt{3}/21,-4\sqrt{3}/21)2\sqrt{3}/13$

soit $\vec{a}'\simeq(-4\sqrt{3}/91,-8/91,-8/91)$

et $a'=a'_B\simeq 4\sqrt{11}/91\simeq 0{,}1458\ al/an^2$

à $t'_{123}=\frac{t'_{12}+t'_{23}}{2}=\frac{17}{4\sqrt{3}}$

f - Nous pouvons raisonner dans *R* ou *R'*. Observons le référentiel propre R_B du vaisseau *B* depuis le référentiel *R,* et considérons le référentiel d'inertie *R''* qui coïncide à t=4 ans avec R_B. Nous démontrons page 113 que l'accélération de *B* mesurée dans *R''* est égale à celle ressentie par les passagers dans le référentiel du vaisseau *B*. Et la relation entre les accélérations d'un point mesurées depuis deux référentiels d'inertie *R''* et *R* est donnée par la loi de transformation des accélérations. Nous choisissons un nouvel axe des abscisses pour *R* selon la trajectoire rectiligne de B. La vitesse de *R''* par rapport à *R* vaut environ :

$$\vec{v}_{B12}\simeq(4-2,2,2)/4 \quad \text{d'où} \quad u=v_{B2}\simeq 3\sqrt{3}/8$$

$$\text{soit} \quad \beta=\beta_{B2}\simeq 3\sqrt{3}/8\ , \quad \gamma=\gamma_{B2}\simeq 1{,}32$$

$$\text{et} \quad a_{propre}=a''=\gamma^3 a\simeq 2{,}275\,a_B\simeq 0{,}246\ al/an^2\ .$$

g - 1 an = 365,25x24x3600 = 31557600 s
1 al = 3.10^8x 31557600 = 9,46728,10^{15} m

Ainsi : $1\frac{al}{an^2}\simeq 9{,}51\frac{m}{s^2}$

et $a_{propre}\simeq 2{,}34\ m/s^2\simeq 24\,\%\,de\ g$

Comparaisons :
17% à la surface de la Lune et 38% pour Mars.

3. Limite des faibles vitesses

Énoncé p72.

La loi de composition donne sur une calculatrice standard 180 km/h car la différence est extrêmement faible. Nous allons donc faire un développement limité :

$$v_{relativiste} = \frac{v_{classique}}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}} = v_{clas}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \simeq v_{clas}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Delta v = v_{clas} - v_{rel} \simeq 2\frac{v^3}{c^2} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta v}{v_c} \simeq \frac{v^2}{c^2} = \beta^2$$

Applications Numériques :

$$\Delta v \simeq 347.10^{-15}\, m/s \simeq 0{,}35\, pm/s \quad \text{et} \quad \frac{\Delta v}{v_c} \simeq 6{,}9.10^{-15}$$

4.1. Le physicien suicidaire *Énoncé p95.*

$$\lambda_{rouge}=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda_{vert} \quad \text{d'où} \quad \beta=\frac{\lambda_R{}^2-\lambda_V{}^2}{\lambda_R{}^2+\lambda_V{}^2}$$

32% de *c* soit 350 millions de km/h.

2. Voile laser *Énoncé p95.*

a - La force s'exprime comme la variation de quantité de mouvement par intervalle de temps :

$$F=\Delta p/\Delta t.$$

Énergie d'un photon : $e=pc$.
Variation de quantité de mouvement par photon réfléchi : $\Delta p=2e/c$ (e/c à l'incidence et e/c à la réflexion).
Nombre de photons reçus pendant Δt : $\Delta N=\Phi\Delta t/e$.
Φ(J/s) : flux / puissance / énergie lumineuse reçue par seconde sur la voile.
Force : $F=2\Phi/c$.
Pression de radiation : $P=F/S=2\Phi/Sc$.

b - De par l'effet Doppler, dans le référentiel de la voile qui s'éloigne des sources laser, les photons sont moins énergétiques et moins nombreux, la puissance apparente est réduite par un facteur Doppler au carré : $\Phi_a=\frac{1-\beta}{1+\beta}\Phi$.
Même facteur pour la force et la pression.

c - Ici β=0,2 et $\frac{P_a}{P}=\frac{2}{3}$.
La force est diminuée d'un tiers.

3.Mélasse optique *Énoncé p96.*

a - Quand l'atome est immobile, les pressions de radiations produites par les deux lasers, et donc les forces F exercées sur la section efficace des deux côtés opposés de l'atome, s'équilibrent.
Quand l'atome est animé d'une vitesse dans la direction d'un laser, la pression de radiation augmente du facteur Doppler au carré dans le sens de la vitesse et diminue d'autant dans le sens opposé : $F_{résultante}=\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}-\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)F=\frac{4\beta}{1-\beta^2}F$.
La force résultante et en sens opposée de la vitesse, il s'agit donc bien d'une force qui ralentit l'atome.

b - Pour v«c soit β«1 : $1-\beta^2\simeq 1$ et $F_r=\frac{4v}{c}F$

Soit sous forme vectorielle : $\vec{F_r}=-\frac{4F}{c}\vec{v}$

c - Au repos, l'atome n'interagit pas avec le laser, car sa raie d'absorption et au-dessus de celle du laser. L'atome reste donc confiné.
Lorsque l'atome possède une énergie cinétique et se dirige vers un laser, celui voit dans son référentiel propre la fréquence laser augmenter par Doppler, quand cette fréquence correspond à sa fréquence de résonance, l'atome absorbe un photon. La conservation de la quantité de mouvement a pour conséquence le ralentissement de l'atome. Un photon est ensuite réémis après une durée de l'ordre de la durée de vie du niveau d'énergie de l'atome dans une direction aléatoire. Le photon émis a une

énergie supérieure à celle de celui absorbé d'où la diminution d'énergie cinétique de l'atome.

$$A + \gamma \rightarrow A^* \rightarrow A + \gamma$$

d - $e=\frac{3}{2}k_B T \simeq \Delta E \geqslant \frac{\hbar}{2\tau}$ d'où $T_{min} \simeq \frac{\hbar}{3k_B \tau}$

A.N. : τ=27ns, $\hbar = h/2\pi$ et $T_{min} \simeq 0{,}1 mK$.

Nous retrouvons le bon ordre de grandeur expérimental.

e - $e=\frac{3}{2}k_B T=\frac{1}{2}m v^2$ où v est la vitesse quadratique moyenne. Ainsi $v=\sqrt{\frac{3k_B T}{m}}=\sqrt{\frac{\hbar}{\tau m}}$.

A.N. : M_{Rb}=87.10^{-3}kg/mol, m=M/N_A, v≃16 cm/s.

4. Détection d'exoplanètes

Énoncé p98.

a - $T^2=\frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}$

avec $m_2=m$, $m_1=k\,m$, $k=10\geq 1$ et $a=R$.

$$d_{GP}=d=R_{Planète}=\frac{m_1}{m_1+m_2}a \quad \text{et} \quad R_{Étoile}=\frac{m_2}{m_1+m_2}a=\frac{m_2}{m_1}d$$

$$v_{Étoile}=\frac{2\pi R_É}{T}=\frac{2\pi m_2 d}{2\pi m_1}\sqrt{\frac{G(m_1+m_2)m_1^3}{d^3(m_1+m_2)^3}}=\frac{1}{1+k}\sqrt{\frac{Gm_1}{d}}$$

A.N. : $v_{Étoile} \simeq 1{,}3\,km/s \ll c$

Précision déjà accessible par Doppler dans les années 50.

b - Quand l'étoile s'approche : $\lambda' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\lambda$

Pour β petit : $\lambda' = (1-\beta)^{1/2}(1+\beta)^{(-1/2)}\lambda \simeq (1-\beta)\lambda$
Et quand l'étoile s'éloigne : $\lambda' \simeq (1+\beta)\lambda$

c - $\lambda_{max} = (1+\beta)\lambda$ et, après T/2, $\lambda_{min} = (1-\beta)\lambda$, d'où

$\Delta\lambda = \lambda_{max} - \lambda_{min} = 2\frac{v}{c}\lambda$ et $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\frac{v}{c}$

A.N. : $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq 8{,}7.10^{-6}$

5. Calculs pour la règle mobile *Énoncé p100.*

a -

$$\begin{cases} E_1 : \; ct = \frac{1}{\beta}\left(x + \frac{L}{2\gamma}\right) \\ E_2 : \; ct = \frac{1}{\beta}\left(x - \frac{L}{2\gamma}\right) \\ \qquad y = 0 \end{cases}$$

b - $\overrightarrow{MC} = (x, y-D, ct_C - ct)$
Pour assurer la colinéarité nous effectuons un produit vectoriel :

$\overrightarrow{MC} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ donne $\begin{cases} y - D - bc(t_C - t) = 0 & (1) \\ ac(t_C - t) - x = 0 & (2) \\ bx - ay + aD = 0 & (3) \end{cases}$

Nous introduisons maintenant les contraintes des lignes d'univers des extrémités.

Pour E_1 :

(3) : $b x_1 = -a D$, $b = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x_1}{D}\right)^2}}$ et $a = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{D}{x_1}\right)^2}}$

(2) : $-x_1 + a\dfrac{1}{\beta}\left(x_1 + \dfrac{L}{2\gamma}\right) - a c t = 0$

d'où en remplaçant a :

$$(1-\beta^2)x_1^{\,2} - 2\beta(ct - L/2\gamma\beta)x_1 + \beta^2[(ct - L/2\gamma\beta)^2 - D^2] = 0$$

Équation du second degré en x_1, même démarche pour x_2, d'où :

$$L_a = \gamma L + \gamma\beta\left[\sqrt{\left(\gamma\beta c t - \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} - \sqrt{\left(\gamma\beta c t + \frac{L}{2}\right)^2 + D^2}\right]$$

Nous retrouvons les limites à grande distance :

$$\lim_{t \to \pm\infty} L_a = \gamma L(1 \mp \beta)$$

6. Transformation des vitesses et aberration de la lumière

Énoncé p101.

a - D'après la transformée de Lorentz :

$$x' = \gamma(x - \beta c t), \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{et} \quad c t' = \gamma(c t - \beta x)$$

d'où pour des variations infinitésimales :

$$dx' = \gamma(dx - \beta c\, dt), \quad d y' = d y \ , \quad d z' = d z$$

$$\text{et} \quad c\, dt' = \gamma(c\, dt - \beta\, dx)$$

$$\text{avec} \quad \beta = \frac{u}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}$$

Et en divisant membre à membre :

$$\frac{dx'}{c\,dt'}=\frac{dx-\beta\,c\,dt}{c\,dt-\beta\,dx},\quad \frac{v_x'}{c}=\frac{\frac{v_x}{c}-\beta}{1-\beta\frac{v_x}{c}}\quad\text{et}\quad v_x'=\frac{v_x-u}{1-\frac{u\,v_x}{c^2}}$$

$$\frac{dy'}{c\,dt'}=\frac{dy}{\gamma\left(c\,dt-\beta\,dx\right)}\quad\text{d'où}\quad v_y'=\frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{u\,v_x}{c^2}\right)}$$

et de même : $v_z'=\dfrac{v_z}{\gamma\left(1-\frac{u\,v_x}{c^2}\right)}$

u est la vitesse de *R'* par rapport à *R*.

b - $\vec{v}=(-c\cos\theta,-c\sin\theta,0)$

c - $\vec{v}'=\left(-\dfrac{c\cos\theta+u}{1+\frac{u\cos\theta}{c}}\ ,\ -\dfrac{c\sin\theta}{\gamma\left(1+\frac{u\cos\theta}{c}\right)}\ ,\ 0\right)$

$$\vec{v}'\cdot\vec{v}'=\frac{\left(c\cos\theta+u\right)^2+c^2\sin^2\theta\left(1-\beta^2\right)}{\left(1+\frac{u\cos\theta}{c}\right)^2}=\ldots=c^2.$$

d - $\tan\theta_a=\dfrac{v_y'}{v_x'}=\dfrac{c\sin\theta}{\gamma\left(c\cos\theta+u\right)}=\dfrac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta+\beta\right)}$.

7. Transformation des vitesses et des accélérations. Généralisation 3D *Énon. p101.*

a - $\vec{v}=(0,v_{2,}0)$ et $\vec{u}=\vec{\beta}\,c=(v_{1,}0,0)$.

or $\vec{v}'=\left(\dfrac{v_x-u}{1-\dfrac{u\,v_x}{c^2}},\dfrac{v_y}{\gamma\left(1-\dfrac{u\,v_x}{c^2}\right)},\dfrac{v_z}{\gamma\left(1-\dfrac{u\,v_x}{c^2}\right)}\right)$

d'où $\vec{v}'=\left(-v_1,\dfrac{v_2}{\gamma},0\right)$ et $\beta'=\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_1^2\beta_2^2}$

AN : $v'\simeq 66\%\,de\,c$

b - $\vec{v}=(v_2\cos\theta,v_2\sin\theta,0)$

d'où $\vec{v}'=\left(\dfrac{v_2\cos\theta-v_1}{1-\beta_1\beta_2\cos\theta},\dfrac{v_2\sin\theta\sqrt{1-\beta_1^2}}{1-\beta_1\beta_2\cos\theta},0\right)$

et $\beta'=\dfrac{\sqrt{(\beta_2\cos\theta-\beta_1)^2+\beta_2^2\sin^2\theta(1-\beta_1^2)}}{1-\beta_1\beta_2\cos\theta}$

soit : $\boxed{\beta'=\dfrac{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2-2\beta_1\beta_2\cos\theta-\beta_1^2\beta_2^2\sin^2\theta}}{1-\beta_1\beta_2\cos\theta}}$

AN : $\beta_1=\beta_2=\sqrt{3}/2$ et $\theta=30°$ donne $v'\simeq 70\%\,de\,c$.

c -1 -

Première méthode :

Nous allons appliquer la formule de la question précédente. Nous allons donc déterminer l'angle $\theta=(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2})$. $\vec{v}_1$ est selon l'arrête d'un cube et $\vec{v}_2$ selon la grande diagonale, nous raisonnons donc dans un triangle rectangle de côtés 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, d'où $\cos\theta=1/\sqrt{3}$, $\sin\theta=\sqrt{2/3}$ et $\theta\simeq 54{,}7°$. Avec $\beta_1=1/2$ et $\beta_2=\sqrt{3}/2$, nous retrouvons bien le même résultat :

À t_{12} : $\beta'=\dfrac{\sqrt{1/4+3/4-2\sqrt{3}/4\times 1/\sqrt{3}-3/16\times 2/3}}{1-\sqrt{3}/4\times 1/\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

À t_{23} : même calcul avec $\beta_2=\sqrt{3}/4$

$$\beta'=\frac{\sqrt{1/4+3/16-2\sqrt{3}/8\times 1/\sqrt{3}-3/64\times 2/3}}{1-\sqrt{3}/8\times 1/\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{10}}{7}$$

Seconde méthode :

Nous calculons les trois composantes de la vitesse avec la transformation générale des vitesses de *R* dans *R'* avec $\beta=1/2$ et $\gamma=2/\sqrt{3}$:

Pour t_{12} : $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)=(1/2,1/2,1/2)$

$$\vec{v}'=\left(\frac{1/2-1/2}{1-1/4},\frac{\sqrt{3}\times 1/2}{2(3/4)},\frac{\sqrt{3}\times 1/2}{2(3/4)}\right)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{et}\quad v'=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Pour t_{23} : $\vec{v}=(1/4,1/4,1/4)$

$$\vec{v}'=\left(\frac{1/4-1/2}{1-1/8},\frac{\sqrt{3}\times 1/4}{2(7/8)},\frac{\sqrt{3}\times 1/4}{2(7/8)}\right)=\left(-\frac{2}{7},\frac{\sqrt{3}}{7,}\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$$

$$\text{et}\quad v'=\frac{\sqrt{10}}{7}$$

c -2 -

Loi de transformation des accélérations :

$$a_y=\frac{dv_y}{dt}\quad\text{et}\quad a_{y'}=\frac{dv_{y'}}{dt'}$$

$$a_{y'}=\frac{dv_{y'}}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{a_y\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)+v_y\frac{u}{c^2}a_x}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2}\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}$$

d'où au final :

$$\vec{a}'=\begin{pmatrix} \dfrac{a_x}{\gamma^3\left(1-\dfrac{u v_x}{c^2}\right)^3} \\ \dfrac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{u v_x}{c^2}\right)^2}\left(a_y+\dfrac{\dfrac{u v_y}{c^2}a_x}{\left(1-\dfrac{u v_x}{c^2}\right)}\right) \\ \dfrac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{u v_x}{c^2}\right)^2}\left(a_z+\dfrac{\dfrac{u v_z}{c^2}a_x}{\left(1-\dfrac{u v_x}{c^2}\right)}\right) \end{pmatrix}$$

La loi de transformation est très différente de celle de la mécanique classique où, entre deux référentiels d'inertie, $\vec{a}=\vec{a}_a=\vec{a}_r=\vec{a}'$. $\vec{a}'$ dépend ici de $\vec{a}$ et $\vec{v}$ (ce qui ne se produit que pour des référentiels non galiléens en mécanique classique).

Nous prenons $\vec{a}$ et $\vec{v}$ en t=4 :

$$\vec{a}=(-1/16,-1/16,-1/16) \quad \text{et} \quad \vec{v}=(3/8,3/8,3/8)$$

$$\beta=1/2 \quad \text{et} \quad \gamma=2/\sqrt{3}$$

$$\vec{a}'=\left(-\frac{3\times 8^2}{13^3}\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3\times 8^2}{13^3},-\frac{3\times 8^2}{13^3}\right)$$

$$a'=\frac{3\times 8^2}{13^3}\frac{\sqrt{11}}{2}\simeq 0{,}145\ al/an^2$$

Résultats, tant en vitesses qu'en accélérations, en accord avec ceux trouvés précédemment.

8. Ciel étoilé à mi-parcours

Énoncé p102.

a - $M=-2{,}5\log\left(\frac{5.10^{-5}\times 25^2}{4^2\times 37}\right)\simeq 11>6$

Nous divisons les puissances émises par la distance au carré.

Proxima du Centaure n'est pas visible à l'œil nu.

b - $M=-2{,}5\log\left(\frac{5.10^{-5}\times 25^2}{2^2\times 37}\right)\simeq 9>6$

Proxima ne serait toujours pas visible à l'œil nu.

c - $\theta_a=0$ d'où $I_a=\frac{1+\beta}{1-\beta}I=39I$ avec $\beta=0{,}95$.

$$M=-2{,}5\log\left(\frac{39\times 5.10^{-5}\times 25^2}{2^2\times 37}\right)\simeq 5<6$$

Proxima est maintenant visible à l'œil nu !

d - $M=-2{,}5\log\left(\frac{1\times 25^2}{2^2\times 37}\right)\simeq -1{,}5<6$

Le Soleil serait bien visible à l'œil nu (équivalent à la luminosité de Sirius vue depuis la Terre).

e - $\theta_a=\pi$ d'où $I_a=\frac{1-\beta}{1+\beta}I=\frac{I}{39}$

$$M=-2{,}5\log\left(\frac{1\times 25^2}{39\times 2^2\times 37}\right)\simeq 2{,}4<6$$

Le Soleil est encore visible à l'œil nu avec un éclat comparable à celui de l'étoile polaire.

f - Le Soleil dans le ciel nocturne de l'exoplanète Proxima b serait visible à l'œil nu, avec une magnitude nulle, soit un éclat comparable à Véga depuis la Terre.

9. Simulation numérique du ciel

Énoncé p104.

a - Loi de probabilité sphérique uniforme :

- Nous avons une distribution uniforme selon φ :

$$\Psi = U(0,360)=360\,U \quad \text{avec} \quad U=U(0,1)$$

En effet, les éléments de surface entre et φ et $\varphi+d\varphi$ sont tous de même taille : $dS=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta \sin\theta\, d\varphi = 2\,d\varphi$.

Correspond à la surface limitée par deux méridiens à la surface d'une sphère.

- Nous n'avons pas une distribution uniforme selon θ.

Les éléments de surface entre et θ et $\theta+d\theta$ ne sont pas tous de même taille :

$$dS=\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\theta \sin\theta\, d\varphi = 2\pi \sin\theta\, d\theta.$$

Est analogue à la surface limitée par deux latitudes à la surface d'une sphère. La surface au niveau de l'équateur est plus grande qu'aux pôles.

Nous avons une densité de probabilité ***f(x)*** proportionnelle à ***sin(x)*** :

$$f(x)=k\sin(x) \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} f(x)dx=1 \quad \text{d'où} \quad k=\frac{1}{2}.$$

Fonction de répartition : $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\frac{1-\cos(x)}{2}$.

D'après le théorème d'inversion : $\Theta=F^{-1}(U)$.

D'où : $\Theta=arcos(1-2U)$.

b - Pour les valeurs de φ, nous entrons sur une première colonne d'un tableur :

=ALEA.ENTRE.BORNES(0;360) (pour LibreOffice)

Pour les valeurs de θ, nous entrons sur une deuxième

colonne : =ACOS(1-2*ALEA())/PI()*180

Avant de calculer, les angles apparents, l'énergie et le nombre de photons reçus, nous vérifions, au début de la feuille de calcul, la cohérence des résultats avec la théorie :

$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2} 2\pi\sin\theta\, d\theta = 2\pi\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)$$

Surface S obtenue pour une sphère unité, ensuite on divise par 4π pour le pourcentage. Par exemple, au pôle céleste nord entre 0° et 20° de colatitude, nous avons 3% de la surface et donc des étoiles, alors qu'entre 80° et 100°, donc pour une même amplitude d'angle, nous en avons 17%. Ça correspond bien à une distribution sphérique uniforme. Sur le graphique l'uniformité ne saute pas aux yeux ; c'est le même problème lorsqu'on veut représenter une sphère sur un plan. Par exemple, sur un mappemonde en projection de Mercator, le Groenland et l'Afrique semblent de surfaces équivalentes alors qu'en fait l'Afrique est 14 fois plus grande.

Fichier : www.voyagepourproxima.fr/docs/CielRelativiste.ods

10. Un peu de maths... *Énoncé p105.*

a - cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sin(a)sin(b)
sin(a+b)=sin(a)cos(b)+cos(a)sin(b)

Moyen mnémotechnique :

COCO MOINS SISI, SICO PLUS COSI

Se redémontre rapidement en passant dans $\mathbb{C}$:

$$e^{i(a+b)}=e^{ia}\,e^{ib}=\cos(a+b)+i\sin(a+b)=...$$

D'où : $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

b - a=b=θ/2 donne $\tan(\theta)=\dfrac{2\tan(\theta/2)}{1-\tan^2(\theta/2)}$.

c - $\forall\ (\theta,\theta_a)\in\ ]0,\theta_0[\cup]\theta_0,\pi[$:

$$\tan(\theta_a)=\frac{2\tan(\theta_a/2)}{1-\tan^2(\theta_a/2)}=\frac{\sin\theta}{\gamma(\beta+\cos\theta)}=\frac{1}{k}$$

D'où : $x^2+2kx-1=0$ avec $x=\tan(\theta_a/2)$

$$x=-k\pm\sqrt{k^2+1}=\gamma\frac{-(\beta+\cos\theta)\pm\sqrt{(\beta+\cos\theta)^2+(1-\beta^2)\sin^2\theta}}{\sin\theta}$$

$$x=\gamma\frac{-\beta-\cos\theta\pm\sqrt{\beta^2+2\beta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta-\beta^2\sin^2\theta}}{\sin\theta}$$

$$x=\gamma\frac{-\beta-\cos\theta\pm|1+\beta\cos\theta|}{\sin\theta}=\gamma\frac{-\beta-\cos\theta+1+\beta\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$x=\gamma(1-\beta)\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\tan(\theta/2)\qquad \text{CQFD}$$

11. Répartition de l'énergie

Énoncé p106.

a - Nous avons : $d\tan(\theta_a/2)=\dfrac{d\theta_a}{\cos^2\theta_a}=\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

soit : $d\theta=\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta_a}d\theta_a$

De plus : $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\dfrac{\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$

car $\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}$ et $\sin^2\theta=\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$$d\Omega=2\pi\sin\theta\,d\theta=4\pi(1-\beta^2)\frac{\tan\frac{\theta_a}{2}}{\left(1-\beta+(1+\beta)\tan^2\frac{\theta_a}{2}\right)^2}\frac{d\theta_a}{\cos^2\theta_a}$$

$$d\Omega=2\pi(1-\beta^2)\frac{\sin\theta_a}{(1-\beta\cos\theta_a)^2}d\theta_a=\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta_a)^2}d\Omega_a$$

$$\frac{n_\beta(\theta_a)}{n_{\beta=0}}=\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta_a)^2}$$

$$\frac{n_\beta(0)}{n_{\beta=0}}=\frac{1+\beta}{1-\beta}\quad\text{et}\quad\frac{n_\beta(\pi)}{n_{\beta=0}}=\frac{1-\beta}{1+\beta}$$

$$n_{\beta=0,5}(0)=3n_{\beta=0}\quad\text{et}\quad n_{\beta=0,5}(\pi)=n_{\beta=0}/3$$

b - $$N_{\beta=0}=\int_{\theta=0}^{\pi}n_{\beta=0}\,d\Omega=4\pi n_{\beta=0}$$

$$N_\beta=\int_{\theta_a=0}^{\pi}n_\beta(\theta_a)\,d\Omega_a=\frac{N_{\beta=0}}{2}\int_{\theta_a=0}^{\pi}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta_a)^2}\sin\theta_a\,d\theta_a$$

Le calcul de l'intégrale donne 2, nous avons bien un nombre d'étoiles constant : $N_\beta=N_{\beta=0}=N$.

c - $$E=\int_{\theta=0}^{\pi}n_{\beta=0}I\,d\Omega=4\pi n_{\beta=0}I$$

$$E_a=\int_{\theta_a=0}^{\pi}n_\beta(\theta_a)I_a(\theta_a)\,d\Omega_a=\frac{E}{2}\int_{\theta_a=0}^{\pi}\frac{(1-\beta^2)^2}{(1-\beta\cos\theta_a)^4}\sin\theta_a\,d\theta_a$$

$$E_a=\int_{\theta_a=0}^{\pi}n_\beta(\theta_a)I_a(\theta_a)\,d\Omega_a=\frac{\gamma^2}{3}(3+\beta^2)E$$

Nous avons bien l'expression du cours.

d -

$$E_a(0\leq\theta_a\leq\frac{\pi}{2})=\int_{\theta_a=0}^{\frac{\pi}{2}} n_\beta I_a d\Omega_a=\frac{(1+\beta)^2}{(1-\beta)}\frac{(\beta^2-3\beta+3)}{6}E$$

$$E_a(\frac{\pi}{2}<\theta_a\leq\pi)=\int_{\theta_a=\frac{\pi}{2}}^{\pi} n_\beta I_a d\Omega_a=\frac{(1-\beta)^2}{(1+\beta)}\frac{(\beta^2+3\beta+3)}{6}E$$

Pour β=0,5, vers l'avant $E_a(\theta<\pi/2)\simeq 1{,}3\ E$ et vers l'arrière $E_a(\theta>\pi/2)\simeq 0{,}13\ E$. Au total $E_a\simeq 1{,}44\ E$, et vers l'avant $E_a(\theta<\pi/2)/E_a\simeq 90{,}8\%$.

12. Nombre de photons

Énoncé p107.

a - Énergie élémentaire reçue depuis l'élément de surface dS : $dE=n\,I\,d\Omega=n(\theta)\,I(\theta)\,2\pi\sin\theta\,d\theta$.
L'énergie d'un photon est donnée par la relation suivante : $e=h\,f=h\,c/\lambda$. Dont l'expression du nombre de photons reçus depuis cet élément de surface :

$$dN_{photons}=dE/e$$

Dans le référentiel du vaisseau :

$$\frac{I_a}{I}=\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta_a)^2},\quad \frac{\nu_a}{\nu}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta_a}\quad\text{et}\quad \frac{n_\beta(\theta_a)}{n_{\beta=0}}=\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta_a)^2}$$

Donc : $dN_{photons,a}=dE_a/e_a=n_a I_a d\Omega_a/e_a$

$$dN_{p,a}=\frac{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\beta\cos\theta_a)^3}\sin\theta_a\,d\theta_a\times\frac{2\pi n_{\beta=0} I\lambda}{hc}$$

Au total :

$$N_{p,a}=Constante\times\int_{\theta_a=0}^{\theta_a=\pi}\frac{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\beta\cos\theta_a)^3}\sin\theta_a\,d\theta_a=\gamma\,N_p$$

Le nombre de photons reçus augmente bien d'un facteur gamma.

b - En intégrant de 0 à $\pi/2$:

$$N_{p,a}(0<\theta_a<\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}(1+\beta)^2(1-\frac{\beta}{2})$$

Par exemple, à 50% de *c*, il y a, au total, 15% de photons reçus en plus. Mais surtout ils sont différemment distribués : 84% des photons proviennent de l'hémisphère avant, pour 91% de l'énergie totale.

13. Puissance émise par une étoile *Énoncé p108.*

a - $P=\iiint i(\lambda)\,d\lambda\,d\Omega\,dS=\int i(\lambda)\,d\lambda\int d\Omega\int dS$

D'où : $P=I\times 2\pi\times 4\pi R^2$

Avec : $I=\int i(\lambda)\,d\lambda=\int_0^{+\infty}\frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}\,d\lambda$

L'intégrale I est évaluée numériquement sur www.integral-calculator.com. h, la constante de Planck vaut $6{,}63.10^{-34}$ J.s. k_B est la constante de Boltzman, $k_B=R/N_A$, R=8,31 J/mol/K (constante des gaz parfaits) et $N_A=6{,}02.10^{23}$ mol^{-1} (nombre d'Avogadro).
On trouve $P\simeq 4{,}34.10^{26}$ W, ce qui correspond à la valeur attendue.

b - Valeurs proportionnelles aux aires sous la courbe de la luminance :

$$P_{visible} = \int_{\lambda=400\,nm}^{\lambda=800\,nm} i(\lambda)\, d\lambda\, d\Omega\, dS \simeq 1{,}80.10^{26}\, W$$

$$P_{IR} = \int_{\lambda=800\,nm}^{+\infty} i(\lambda)\, d\lambda\, d\Omega\, dS \simeq 2{,}26.10^{26}\, W$$

$$P_{UV} = \int_{\lambda=0}^{\lambda=400nm} i(\lambda)\, d\lambda\, d\Omega\, dS \simeq 0{,}29.10^{26}\, W$$

d'où $\frac{P_{vis}}{P} \simeq 41\,\%$, $\frac{P_{IR}}{P} \simeq 52\,\%$ et $\frac{P_{UV}}{P} \simeq 7\,\%$.

c - Pour Proxima du Centaure, nous trouvons $P_P \simeq 1{,}1.10^{24}$ W, d'où $P_P/P_S \simeq 0{,}25\%$, ce qui correspond globalement à la valeur trouvée sur le wiki.

5.1. Mi-temps

Énoncé p129

En reprenant les résultats et notations du cours, nous avons pour le temps galactique à mi-temps $t_{1/8}=T/8\simeq 1{,}397$ ans. D'où la distance parcourue à mi-temps terrestre : **$x(t_{1/8})\simeq 0{,}74$ al**. Vu depuis la Terre, la distance à mi-parcours vaut 2 al et la valeur à mi-temps du mi-parcours est inférieure à une année-lumière, car le mouvement n'est pas uniforme mais accéléré.

Dans le référentiel du vaisseau nous nous trouverons à une position différente, car le temps du vaisseau est chaque fois plus dilaté et passe moins vite avec l'augmentation de la vitesse.

Pour le mi-temps propre : $\tau_{1/8}=\tau/8\simeq 0{,}855$ ans.

Or $\frac{gt}{c}=sh\left(\frac{g\tau}{c}\right)$, nous trouvons alors $\frac{gt_{\tau/8}}{c}$ et **$x(\tau_{1/8})\simeq 0{,}41$ al**.

En mécanique classique les distances seraient, bien entendu, les mêmes, car les temps sont identiques :

$$x=\frac{1}{2}gt^2\ ,\quad \frac{D}{2}=\frac{1}{2}g\left(2t_{1/8}\right)^2 \quad \text{et} \quad x\left(t_{1/8}\right)=\frac{D}{8}=0{,}5\,al.$$

Les calculs classiques sont, bien sûr, ici faux, car la vitesse n'est pas petite devant c, la vitesse de la fusée dépasserait même la vitesse de la lumière à mi-parcours.

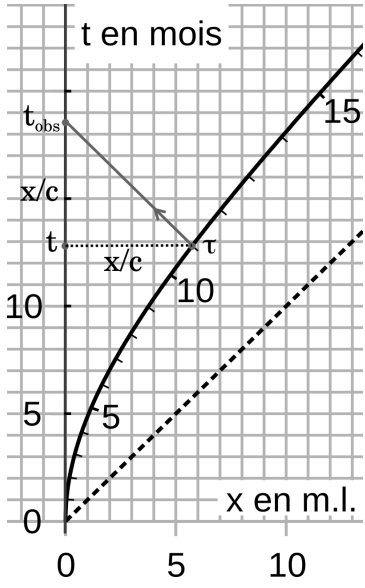
5.2 Téléréalité *Énoncé page 129*

a - Nous avons montré que $\gamma=\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}$,

d'où $x=\frac{c^2}{g}(\gamma-1)$.

De plus avec $t=\frac{c}{g}sh\left(\frac{g\tau}{c}\right)$

on obtient $\gamma=ch\left(\frac{g\tau}{c}\right)$.



b - 1- 2- Nous avons :

$$t_{obs}=t+\frac{x(\tau)}{c}$$

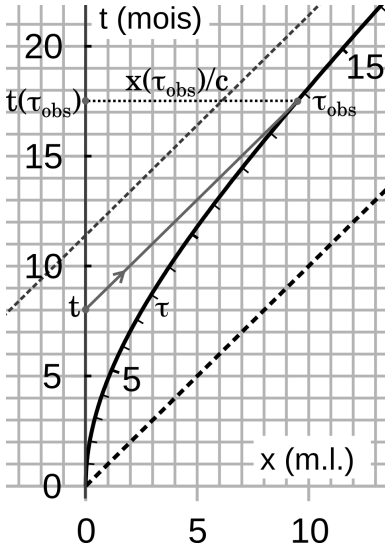
or $x=\frac{c^2}{g}\left[ch\left(\frac{g\tau}{c}\right)-1\right]$,

donc

$$t_{obs}=\frac{c}{g}\left[sh\left(\frac{g\tau}{c}\right)+ch\left(\frac{g\tau}{c}\right)-1\right]$$

d'où $t_{obs}=\frac{c}{g}\left(e^{\frac{g\tau}{c}}-1\right)$

et $\tau=\frac{c}{g}\ln\left(\frac{gt_{obs}}{c}+1\right)$.



3- $\tau=6\,mois$ donne

$t_{obs}\simeq 7{,}9\,mois.$

4- Nous pouvons calculer les τ pour des t_{obs} de 12 mois et 12 mois et un jour.

On soustrait les deux τ et on a la réponse. Une autre méthode plus élégante consiste à calculer la dérivée de t_{obs} par rapport à τ. En effet, les variations sont petites, un jour, sur la durée du voyage, un an. La courbe peut être linéarisée autour du point étudié.

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t_{obs}} \simeq \frac{d\tau}{dt_{obs}}\ , \quad \frac{d\tau}{dt_{obs}} = \frac{1}{\frac{g\,t_{obs}}{c}+1} \quad \text{et} \quad \frac{dt_{obs}}{d\tau} = 1+\frac{g\,t_{obs}}{c}$$

Pour t_{obs}=1 an et Δt_{obs}=1 jour, nous trouvons $\Delta\tau \simeq$ 11h et 41 minutes. L'émission quotidienne de téléréalité sur Terre devra se contenter, un an après le départ, de ne décrire qu'une demi-journée de vie au bord du vaisseau.

Pour t_{obs}=10 ans, nous trouvons $\Delta\tau \simeq$ 2h et 5 minutes. L'émission de téléréalité narrera chaque jour 2 heures au bord du vaisseau. Si c'est pendant le sommeil des spationautes, il n'y aura pas grand-chose à dire !

c - 1- 2- Nous avons :

$$t(\tau_{obs}) = t+\frac{x(\tau_{obs})}{c} \quad \text{d'où} \quad t=\frac{c}{g}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{g\,\tau_{obs}}{c}}\right)$$

$$\text{et} \quad \tau_{obs}=\frac{c}{g}\ln\left(\frac{1}{1-\frac{g\,t}{c}}\right) \quad \text{avec} \quad t<t_{\lim}=\frac{c}{g}$$

A.N. : $t_{\lim} \simeq 11{,}4\,mois$, instant précisément atteint le 14 décembre 2100 à 17h20m00s.

3- $t=6\,mois$ donne $\tau_{obs} \simeq 8{,}5\,mois$.

4- $\frac{d\tau_{obs}}{dt} = e^{\frac{g\tau_{obs}}{c}}$

Pour τ_{obs}=1 an et $\Delta\tau_{obs}$=1 jour, nous trouvons $\Delta t \simeq$8h et 22 minutes. L'émission quotidienne de téléréalité au bord du vaisseau se contentera largement de 8 heures de la vie sur Terre. Il y a toujours beaucoup de choses à raconter, à tout moment sur le globe des personnes se lèvent, vivent et se couchent.

Pour τ_{obs}=10 ans, nous trouvons $\Delta t \simeq$2,3 secondes ! L'émission de téléréalité dans la fusée sera limitée par l'horizon des événements situé le 14 décembre 2100 à 17h20m00s (calendrier terrestre). En 2110, calendrier du vaisseau, 10 ans après leur départ, ils auront des images de la Terre du 14 décembre 2100, de 17h06m30s jusqu'à 17h06m32s ! Et le jour d'après, ils auront deux secondes de plus...

d - Effet Doppler pour un référentiel accéléré :

1- Depuis le référentiel d'inertie : $\frac{dt_{obs}}{d\tau} = \frac{T_{Reçue}}{T_{Emise}}$

d'où : $f_R = \frac{f_E}{1+\frac{g t_{obs}}{c}}$ et $\lambda_R = \lambda_E\left(1+\frac{g t_{obs}}{c}\right)$

Depuis le référentiel accéléré : $\frac{d\tau_{obs}}{dt} = e^{\frac{g\tau_{obs}}{c}}$

d'où : $f_R = f_E e^{-\frac{g\tau_{obs}}{c}}$ et $\lambda_R = \lambda_E e^{\frac{g\tau_{obs}}{c}}$

2- $\frac{\lambda_R}{\lambda_E}=2=\mathrm{e}^{\frac{g\tau_{obs}}{c}}$ d'où $\tau_{obs}=\frac{c}{g}\ln 2=t_{\lim}\ln 2.$

La lumière bleue émise depuis la Terre sera perçue rouge à bord du vaisseau après 7,9 mois vécus par les astronautes dans le vaisseau.

3- $t_{obs}=\frac{c}{g}\ln 2$ d'où $\lambda_R=(1+\ln 2)\lambda\simeq 677\,nm.$

Lumière orange-rouge perçue sur Terre.

4- Contrairement au cas des référentiels d'inertie, l'effet Doppler en référentiel accéléré n'est pas symétrique. On retrouve une asymétrie dans l'expérience des jumeaux, due aussi à la présence d'un référentiel non inertiel.

Nous avons étudié le cas des mêmes temps propres. Nous pouvons aussi regarder à des moments simultanés : si $\tau=\frac{c}{g}\ln 2$ alors $t=\frac{c}{g}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{g\tau}{c}}\right)=\frac{c}{2g}$ et

$$\lambda_R=\lambda\left(1+\frac{gt}{c}\right)=\frac{3}{2}\lambda=600\,nm$$

3. Face-à-face *Énoncé p131*

a - En remplaçant dans les formules, nous trouvons :

$$v(x)=c\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{g\,x}{c^2}\right)^2}}\,,\quad \text{d'où}\quad \frac{v(D/2)}{c}\simeq 95\,\%$$

Vitesse relative : $\beta_{rel}(D/2)=\dfrac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}=\dfrac{2\beta}{1+\beta^2}\simeq 99{,}85\,\%$

b - $\dfrac{v(D/4)}{c}\simeq 87\,\%$ et $\beta_{rel}(D/4)\simeq 99\,\%$.

c - Proposons l'effet Doppler. Si chacun des vaisseaux émet en permanence à l'aide d'une lampe un rayon lumineux monochromatique de fréquence *f* connue, on peut, à partir de la fréquence reçue f_r, en déduire la vitesse relative :

$$f_r=\sqrt{\frac{1+\beta_r}{1-\beta_r}}f\quad \text{d'où}\quad \beta_r=\frac{\left(\frac{f_r}{f}\right)^2-1}{\left(\frac{f_r}{f}\right)^2+1}$$

d - $v=\dfrac{\frac{g\,t}{c}}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}$ et $\dfrac{g\,t}{c}=sh\left(\dfrac{g\,\tau}{c}\right)$ d'où $\dfrac{v}{c}=th\left(\dfrac{g\,\tau}{c}\right)$

e - Nous pouvons considérer les deux référentiels d'inertie qui coïncident à un instant *t* avec les vaisseaux. D'après la loi de composition des vitesses :

$$\frac{v_r}{c}=\frac{2\,th\,\xi}{1+th^2\,\xi}\quad \text{avec}\quad \xi=\frac{g\,\tau}{c}$$

Expérimentalement, on constate que l'effet Doppler ne dépend que des vitesses instantanées de l'émetteur et du récepteur, et non des accélérations de ceux-ci. Nous trouverions donc le même résultat dans le référentiel propre du vaisseau qui est accéléré et non inertiel.

f - $a_r=\frac{dv_r}{d\tau}$, $a_r=g\frac{dv_r/c}{d\xi}$ et $a_r=\frac{2g}{ch^4\xi(1+th^2\xi)^2}$

Au départ : $\tau=0$, $\xi=0$, $ch\xi=1$, $th\xi=0$ et $a_r=2g$.
Au quart : $\xi=g\tau/c\simeq 0{,}90$ et $a_r=0{,}208g$.
À mi-chemin : $\xi=g\tau/c\simeq 1{,}80$ et $a_r=6.10^{-3}g$.
L'accélération varie en fonction du temps propre : le mouvement relatif des vaisseaux n'est pas uniformément accéléré.

En mécanique de Newton:

$x_1=\frac{1}{2}gt^2$, $a_2=-g$, $v_2=-gt$ et $x_2=-\frac{1}{2}gt^2+D$.

D'où $x_r=x_2-x_1=D-gt^2$, $v_r=-2gt$ et $a_r=-2g$.
Dans ce cas le mouvement relatif est aussi uniformément accéléré avec une accélération double. Nous retrouvons bien ce résultat dans la limite classique $\xi=0$.

6.1. Métrique euclidienne

Énoncé p159

- Translation : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + b \end{cases}$ $dx' = dx + 0$ ... $dl' = dl$.

- Rotation : cas de rotation dans le plan (Oxy)

Par projections : $\begin{cases} \vec{i} = \cos\theta\, \vec{i}\,' - \sin\theta\, \vec{j}\,' \\ \vec{j} = \sin\theta\, \vec{i}\,' + \cos\theta\, \vec{j}\,' \\ \vec{k} = \vec{k}\,' \end{cases}$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{r}\,' = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,'$$

$$\vec{r} = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' = (x\cos\theta + y\sin\theta)\vec{i}\,' + (-x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{j}\,'$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

$$dl'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 =$$

$$(dx\cos\theta + dy\sin\theta)^2 + (-dx\sin\theta + dy\cos\theta)^2 + dz^2$$

$$dl'^2 = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(dx^2 + dy^2)$$

$$+ (2\cos\theta\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta)\,dx\,dy + dz^2$$

$$dl' = dl$$

- Transformation de Galilée : $\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$

La mesure de la position des deux extrémités d'une règle se fait au même instant, et le terme *vt* est donc constant :

$$\Delta x' = (x_2 - vt) - (x_1 - vt) = \Delta x$$

d'où $dl' = dl$

2. Rapidité

Énoncé p159

1 - Avec $\gamma = ch\varphi \geqslant 1$ et $-\beta\gamma = sh\varphi$,
on a bien $ch^2\varphi - sh^2\varphi = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$ et $\varphi = argch\,\gamma$.
Nous pouvons vérifier l'invariance de l'intervalle :

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

$$= c^2 dt^2 ch^2\varphi + 2c\,dt\,dx\,ch\varphi\,sh\varphi + dx^2 sh^2\varphi$$

$$- c^2 dt^2 sh^2\varphi - 2c\,dt\,dx\,ch\varphi\,sh\varphi - dx^2 ch^2\varphi - dy^2 - dz^2 = ds^2$$

2 -
$$\begin{cases} ct' = ct\,ch\,\varphi_1 + x\,sh\,\varphi_1 \\ x' = ct\,sh\,\varphi_1 + x\,ch\,\varphi_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} ct'' = ct'\,ch\,\varphi_2 + x'\,sh\,\varphi_2 \\ x'' = ct'\,sh\,\varphi_2 + x'\,ch\,\varphi_2 \end{cases}$$

$$ct'' = (ct\,ch\,\varphi_1 + x\,sh\,\varphi_1)\,ch\,\varphi_2 + (ct\,sh\,\varphi_1 + x\,ch\,\varphi_1)\,sh\,\varphi_2$$
$$= ct\,(ch\varphi_1\,ch\varphi_2 + sh\varphi_1\,sh\varphi_2) + x\,(ch\varphi_1\,sh\varphi_2 + sh\varphi_1\,ch\varphi_2)$$
$$= ct\,ch(\varphi_1 + \varphi_2) + x\,sh(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$x'' = ct\,sh(\varphi_1 + \varphi_2) + x\,ch(\varphi_1 + \varphi_2)$ d'où $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

La rapidité, tout comme la vitesse covariante, présente l'avantage de varier de -∞ à +∞. L'artefact de la vitesse limite disparaît. De plus, la rapidité est additive, contrairement aux vitesses covariante et classique qui ont des lois de composition plus complexes en relativité.

3. Métrique de Rindler

Énoncé p159

1 - Nous avons invariance par rotation dans le plan (y,z). Nous n'avons pas invariance par rotation dans les plans (r,y) et (r,z). Par exemple :

$$\begin{cases} r' = r\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -r\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

et $ds'^2 = (r\cos\theta + y\sin\theta)^2 d\tau^2 - dr^2 - dy^2 - dz^2 \neq ds^2$

Transformée de Lorentz : $\begin{cases} \tau' = \tau\,ch\,\varphi + r\,sh\,\varphi \\ r' = \tau\,sh\,\varphi + r\,ch\,\varphi \end{cases}$ ... $ds'^2 \neq ds^2$

Par conséquent, le référentiel n'est pas inertiel.

2 - Pour le référentiel uniformément accéléré :

$$ds^2=\left(1+\frac{g\,x}{c^2}\right)^2 c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$

Il suffit de poser $r=c^2/g+x$ et $\tau=g\,t/c$. Ce changement d'origine et d'unités permet de retrouver la métrique de Rindler. Cette métrique correspond donc à celle d'un référentiel uniformément accéléré.

3 - $ds^2=c^2\,dt^2-dx^2=(dr\,sh\,\tau+r\,ch\,\tau\,d\,\tau)^2-(dr\,ch\,\tau+r\,sh\,\tau\,d\,\tau)^2$

$$=dr^2\,sh^2\,\tau+2\,r\,sh\,\tau\,ch\,\tau\,dr\,d\,\tau+r^2\,ch^2\,\tau\,d\,\tau^2$$
$$-dr^2\,ch^2\,\tau-2\,r\,sh\,\tau\,ch\,\tau\,dr\,d\,\tau-r^2\,sh^2\,\tau\,d\,\tau^2$$
$$=r^2\,d\,\tau^2-dr^2$$ ce qu'il fallait démontrer.

D'où :

$$\begin{cases} ct'=\left(x+\dfrac{c^2}{g}\right)sh\left(\dfrac{g\,t}{c}\right) \\ x'=\left(x+\dfrac{c^2}{g}\right)ch\left(\dfrac{g\,t}{c}\right)-\dfrac{c^2}{g} \end{cases}$$

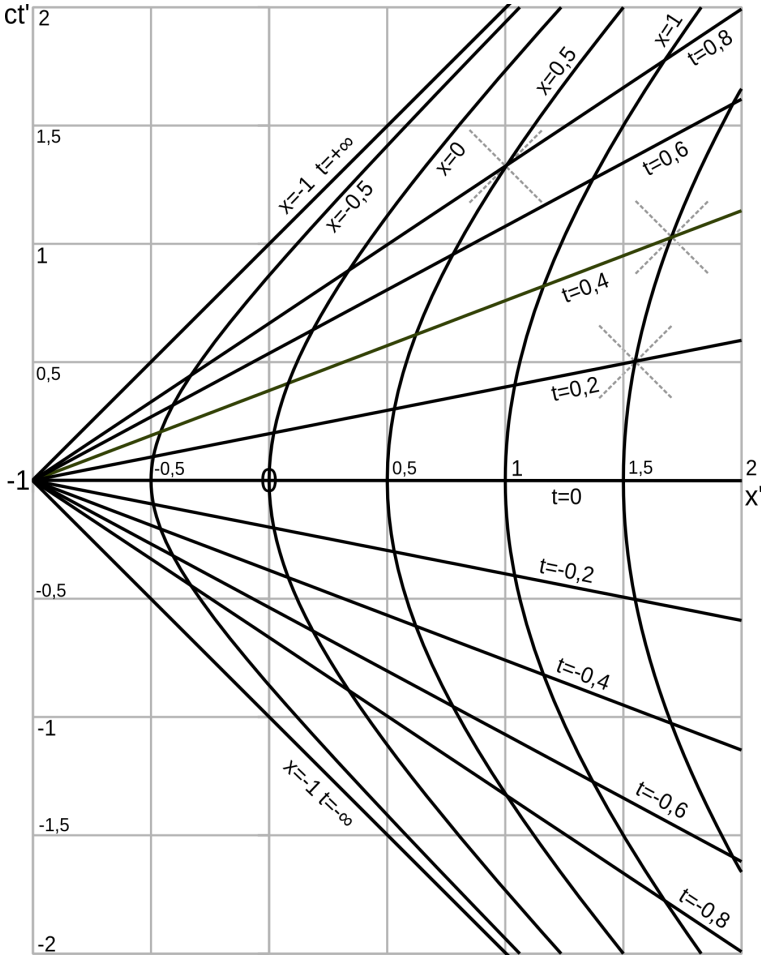
Nous avons simplement remplacé et effectué un changement d'origine pour *x'* de manière à reprendre les conditions initiales choisies (invariance par translation).
Ainsi pour les lignes coordonnées de *x,* nous avons un réseau d'hyperboles centrées sur ($-c^2/g$, 0) :

$$\left(x'+\frac{c^2}{g}\right)^2-c^2t'^2=\left(x+\frac{c^2}{g}\right)^2$$

Les lignes coordonnées de *t* sont des droites qui passent par le centre de l'hyperbole :

$$ct'=th\left(\frac{g\,t}{c}\right)\left(x'+\frac{c^2}{g}\right)$$

Il découle que les lignes coordonnées de *x* sont orthogonales à celles de *t*.



4. Chute d'un objet dans la fusée *Énoncé p160*

1 - Imaginons que nous pouvons utiliser à notre guise un super-pouvoir qui nous permet d'atteindre très rapidement une vitesse très proche de la vitesse limite. Pour gagner, nous pouvons rejoindre un niveau aussi élevé que l'on veut quasi-instantanément et revenir tout aussi vite. Par exemple, un niveau où le temps s'écoule deux fois plus vite, et l'on reviendrait avec 2 min affiché à notre horloge. Sauf qu'il n'est pas possible de revenir à

temps, en effet, du point de vue de l'horloge immobile, même si vous allez à la vitesse limite, il s'écoule une seconde tous les 300 000 km parcourus et vous ne pourrez donc vous élevez de plus de 9 millions de km en une minute, or le lieu où les horloges tournent deux fois plus vite est à près d'une année-lumière de distance !

Deux effets opposés entrent ici en jeu, un effet statique qui fait le temps s'écouler plus vite quand on s'élève, et, un effet dynamique qui, au contraire, ralentit l'horloge quand vous prenez de la vitesse.

Pour gagner, vous devez trouver un compromis entre élévation et vitesse de manière à maximiser votre temps propre. Une particule libre a le temps propre maximal. Pour que votre horloge soit libre, elle doit être en apesanteur et donc en chute libre. Le gagnant n'aura même pas besoin d'accompagner son horloge, il lui suffit de la lancer vers le haut, avec la bonne vitesse pour qu'elle retombe après une minute.
Idem pour la variante avec une courbe en cloche. Dans ce cas, il y a deux horloges fixes au même niveau et auparavant synchronisées (possible ici, car même *x*).

2-a Pour le chemin de temps propre maximal :

$$\int \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v \right) dt = 0$$

Liens entre δx et δv :

$$v_{C'} = \frac{d x_{C'}}{dt} = \frac{d x_C}{dt} + \frac{d \delta x}{dt} = v_C + \delta v \quad \text{et} \quad \delta v = \frac{d}{dt} \delta x$$

Suit une intégration par parties :

$$\int \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial v} \frac{d}{dt} \delta x \right) dt = \int \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} \right) \delta x \, dt + \left[\frac{\partial L}{\partial v} \delta x \right]_{E_i}^{E_f}$$

Les extrémités du chemin sont fixes : $\delta x_{E_i} = 0$ et $\delta x_{E_f} = 0$.

Soit : $$\int\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\right)\delta x\,dt=0$$

Cette relation doit être vraie pour tous δx testés autour du chemin extrémal, d'où :

Équation de Lagrange $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}=0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{1}{2L}\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{g'}{2L}\quad\text{avec}\quad g'=\frac{2a}{c^2}\left(1+\frac{ax}{c^2}\right)\quad\text{et}\quad\frac{\partial L}{\partial v}=-\frac{v}{c^2L}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}=-\frac{dv/dt}{c^2L}+\frac{v}{c^2L^2}\frac{dL}{dt}$$

$$dL=\frac{\partial L}{\partial x}dx+\frac{\partial L}{\partial v}dv\qquad\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial x}v+\frac{\partial L}{\partial v}\dot{v}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}=-\frac{\dot{v}}{c^2L}+\frac{v}{c^2L^2}\left(\frac{g'v}{2L}-\frac{v\dot{v}}{c^2L}\right)=-\frac{\dot{v}}{c^2L}\left(1+\frac{v^2}{c^2L^2}\right)+\frac{g'v^2}{2c^2L^3}$$

$$\frac{\dot{v}}{c^2}(c^2L^2+v^2)=\frac{g'}{2}(v^2-c^2L^2)$$

Équation différentielle du mouvement : $$\frac{\dot{v}}{c^2}=\frac{g'}{g}\left(\frac{v^2}{c^2}-\frac{g}{2}\right)$$

Pour une métrique minkowskienne nous retrouvons le mouvement rectiligne :

$$g=1\,,\quad g'=0\quad\text{et}\quad\dot{v}=\ddot{x}=0.$$

Pour *x* petit devant une année-lumière :

$$g(0)=1\,,\quad g'(0)=\frac{2a}{c^2}\,,\quad\frac{v}{c}\ll1\quad\text{et}\quad\dot{v}=-a$$

Nous retrouvons bien l'équation newtonienne du mouvement uniformément accéléré. Après quelques mois la trajectoire s'éloignera notablement de cette trajectoire parabolique.

Cette équation de chute libre correspond à la trajectoire qui rend le temps propre maximal. Ainsi pour gagner, c'est très simple, il suffit de lancer votre horloge vers le haut (l'avant du vaisseau) de manière à ce qu'elle retombe 60 secondes plus tard. La difficulté est de doser la vitesse initiale pour une retombée pile au bon moment. Le lancer est vertical ou selon une courbe en cloche pour la variante du jeu.

Résolution numérique : La durée de l'expérience est courte comparée à $t_H=c/a$, ainsi, nous pouvons utiliser la courbe parabolique classique et faire des développements limités :

$$\ddot{x}=-g\ ,\ \dot{x}=-gt+v_0\ ,\ x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t\ ,\ v_0=g\frac{\Delta t}{2}\ \text{ et }\ h=\frac{v_0^2}{2g}$$

$$\tau=\int\sqrt{\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)^2-\frac{v^2}{c^2}}\,dt\simeq\int\sqrt{1+\frac{2gx}{c^2}-\frac{(v_0-gt)^2}{c^2}}\,dt$$

$$\tau\simeq\int\sqrt{1+\frac{2gt}{c^2}\left(v_0-\frac{1}{2}gt\right)-\frac{(v_0^2-2v_0gt+g^2t^2)}{c^2}}\,dt\quad ...$$

$$\tau-\Delta t\simeq\frac{1}{c^2}\int_{t=0}^{t=\Delta t}\left(2v_0gt-g^2t^2-\frac{v_0^2}{2}\right)dt\quad ...$$

après calcul : $\tau-\Delta t\simeq\frac{g^2\Delta t^3}{24c^2}$

Pour gagner : v_0=300 m/s, h=4500 m et votre horloge sera en avance de 10 picosecondes. Bravo, on ne peut pas faire mieux !

Dans le référentiel du vaisseau la trajectoire est courbée, alors que dans le référentiel galactique la trajectoire de l'objet est rectiligne.

Notons que la trajectoire d'un photon sera également courbée dans le référentiel accéléré. Mais pour bien comprendre ce qu'il se passe, il faut différencier la vitesse

coordonnée *v* que nous avons défini dans le système de coordonnées du vaisseau, avec, la vitesse mesurée dans un référentiel minkowskien définit localement en espace et en temps au niveau de la particule. C'est cette vitesse qui ne peut dépasser la vitesse limite *c* et qui est égale *c* pour un photon. La vitesse coordonnée n'a pas ce type de contrainte.
Ici, nous sommes en espace-temps plat et ça n'empêche pas aux astronautes de lober leurs partenaires de jeu. Par un raisonnement analogue, dans le cadre de la métrique de Schwarzschild en espace-temps courbe, nous retrouverions aussi les trajectoires courbées que nous observons quand nous jouons au ballon sur la plage. Nous pourrions abandonner notre vision d'une force de gravité pour embrasser celle d'une particule libre qui maximise son temps propre dans une métrique non minkowskienne. Si nous quittons l'analogie locale, il y aura des différences notables entre la fusée accélérée et l'abord d'un astre massif.

2-b $$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial x}v+\frac{\partial L}{\partial v}\dot{v}=\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\right)v+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}v\right)$$

nous reconnaissons dans le premier terme à droite l'équation du mouvement d'où :

$$\frac{d}{dt}\left(L-\frac{\partial L}{\partial v}v\right)=0$$

Équation de conservation $$\boxed{L-\frac{\partial L}{\partial v}v=cst}$$

L'objet lâché en chute libre part de $x=0$ et rejoint l'horizon des événements en $x_H=-\frac{c^2}{a}$. Dans le même temps $g(x)$ varie de 1 à zéro : $g\in]0,1]$.

Expression de la position : $x = x_H(1-\sqrt{g})$

Calcul de la vitesse : $L + \frac{\beta^2}{L} = cst$ avec $\beta = \frac{v}{c}$

Détermination de la constante pour les conditions initiales d'un lâcher : à *t=0*, $x=0$, $\dot{x}=0$, $L(0,0)=1$ et $cst=1$.

D'où : $L^2+\beta^2=L$ et $L^4+2\beta^2L^2+\beta^4=L^2$

$g^2-2g\beta^2+\beta^4+2g\beta^2-2\beta^4+\beta^4=g-\beta^2$ et $\beta=-\sqrt{g(1-g)}$

Expression de la vitesse : $v=-c\sqrt{g(1-g)}$

Calcul de l'accélération :

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dg}\frac{dg}{dx}\frac{dx}{dt}=-c\frac{1-2g}{2\sqrt{g(1-g)}}\frac{2a\sqrt{g}}{c^2}v$$

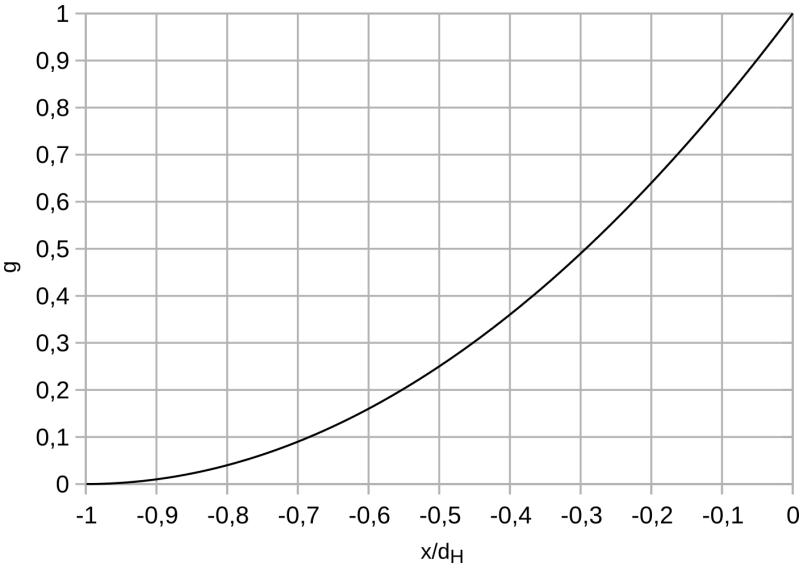
Expression de l'accélération : $\frac{dv}{dt}=-a(2g-1)\sqrt{g}$

L'accélération $\dot{v}$ s'annule en $g=1/2$. Comme attendu, vu que la vitesse est nulle au départ, pour *t=0,* et tend vers zéro quand t tend vers l'infini, elle passe par un maximum :

$v_{max}=\frac{c}{2}$ en $x(v_{max})=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x_H\simeq 0{,}3\,x_H$

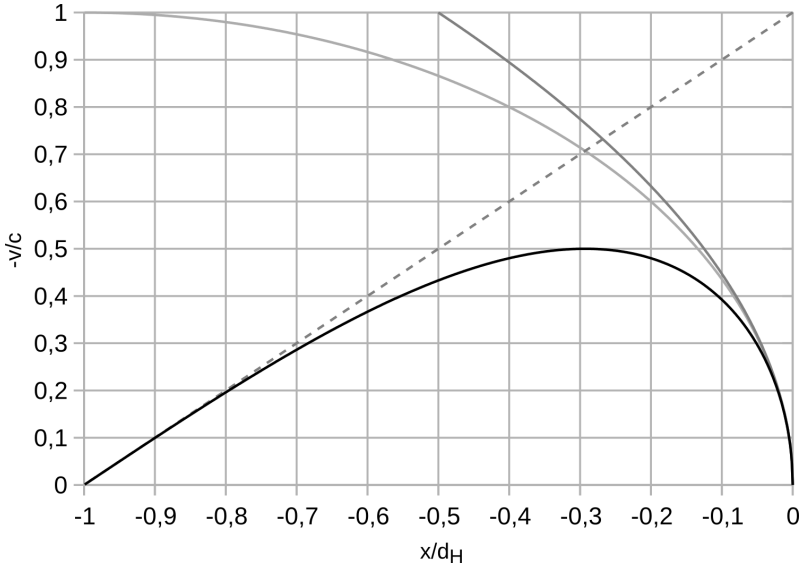
Comme nous le verrons par la suite, la vitesse de la lumière en $x(v_{max})$ vaut c/√2 et $v_{max}=v_{lum}/\sqrt{2}\simeq 71\%v_{lum}$. En accord avec un observateur minkowskien local pour qui $v_{mink}(x_{max})=c/\sqrt{2}\simeq 71\%c$.

Facteur métrique g(x) :



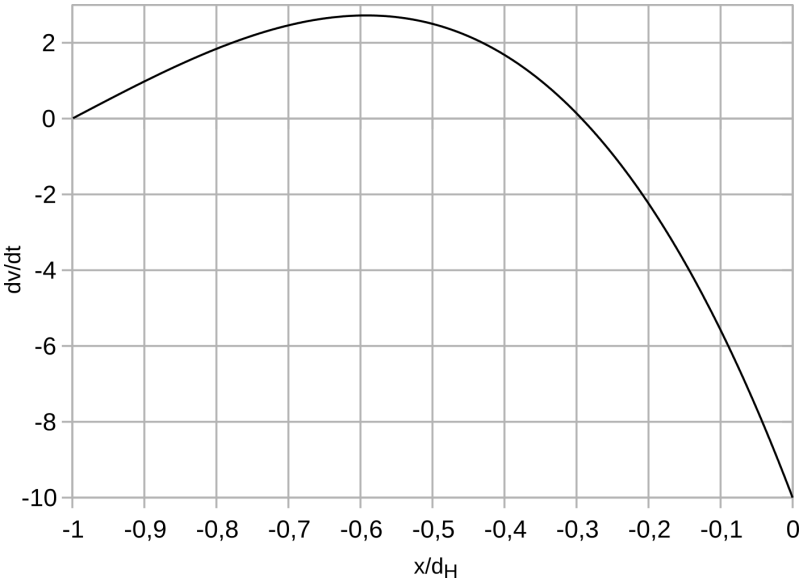
La métrique du référentiel de la fusée uniformément accélérée fait apparaître le facteur temporel $g(x)=(1+x/d_H)^2$ *avec* $d_H=c^2/a$. $g(x)$ *varie de zéro à l'infini, quand, x varie de -*d_H*, l'horizon, à l'infini devant la fusée.*

Vitesse de chute de l'objet v(x) :



Courbe de la vitesse de chute d'un objet lâché sans vitesse initiale en x=0 en fonction de la position. Pour un observateur de la fusée accélérée, l'objet commence à chuter selon un mouvement parabolique classique (courbe gris foncé) pour ensuite atteindre la vitesse maximale c/2 et voir sa vitesse s'annuler sur l'horizon. La vitesse maximale est indépendante de l'accélération propre du vaisseau. Nous avons tracé en pointillés la vitesse coordonnée de la lumière dans ce référentiel non inertiel. En effet, le référentiel accéléré de la fusée n'est pas minkowskien, et la vitesse de la lumière n'est pas fixée à ±c. Pour un photon $d\tau=0$, ce qui donne dans la fusée $v_{lum}(x)=\pm|1+x/d_H|c$. Pour $-1<x<0$ $|v_{lum}|<c$, et, pour $x>0$ $|v_{lum}|>c$. Pour d'autres conditions initiales, comme $x(t=0)=3d_H$, on trouve $v_{max}=-2c$. Nous vérifions qu'en tout point la vitesse de l'objet en chute libre est bien inférieure à celle de la lumière, sauf sur l'horizon où les deux vitesses s'égalisent.

Accélération de l'objet a(x) :



Objet en chute libre dans la fusée : l'accélération s'annule quand la vitesse est maximale. L'accélération change ensuite de signe et l'objet décélère alors jusqu'à l'horizon.

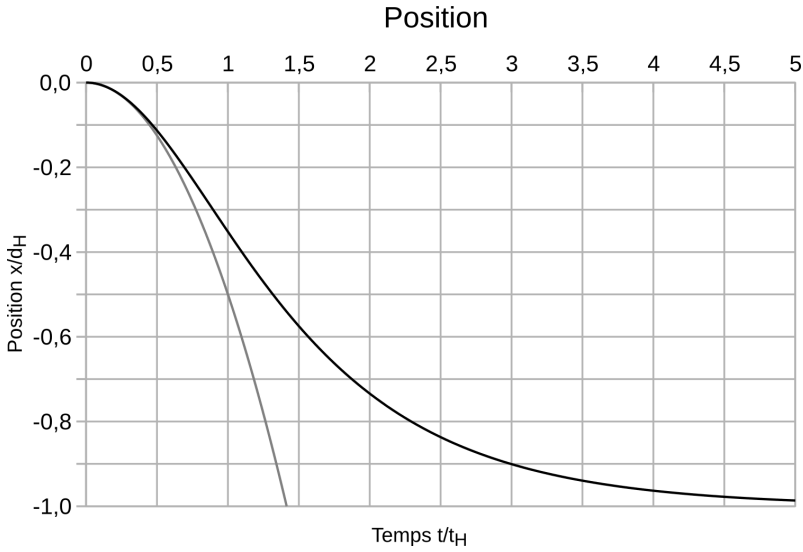
c- Pour résoudre l'équation différentielle nous avons réalisé, pour l'évolution temporelle, des simulations numériques en Runge-Kutta 4. Nous pourrions aussi suivre une approche analytique et réaliser un calcul direct à l'aide du changement de coordonnées donné dans l'exercice sur la métrique de Rindler. Toutes les équations s'expriment à l'aide de grandeurs sans dimensions :

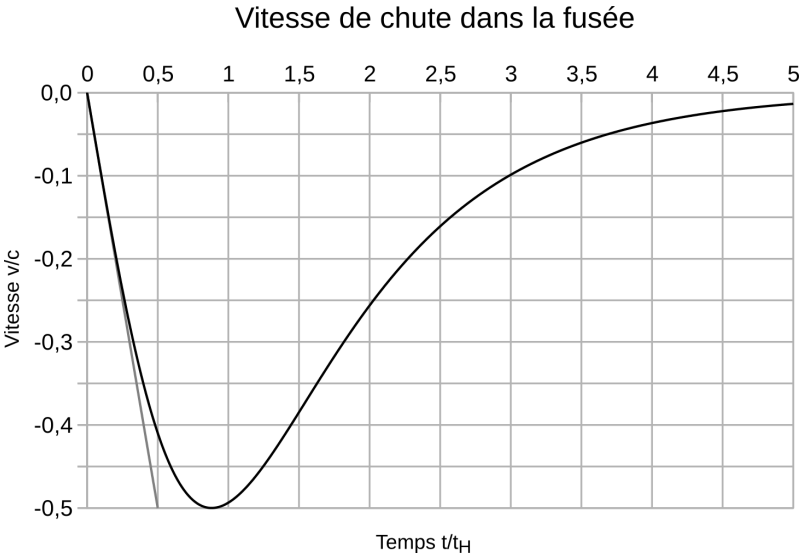
$$X = x/d_H, \quad d_H = c^2/a = -x_H, \quad T = t/t_H, \quad t_H = c/a = d_H/c$$

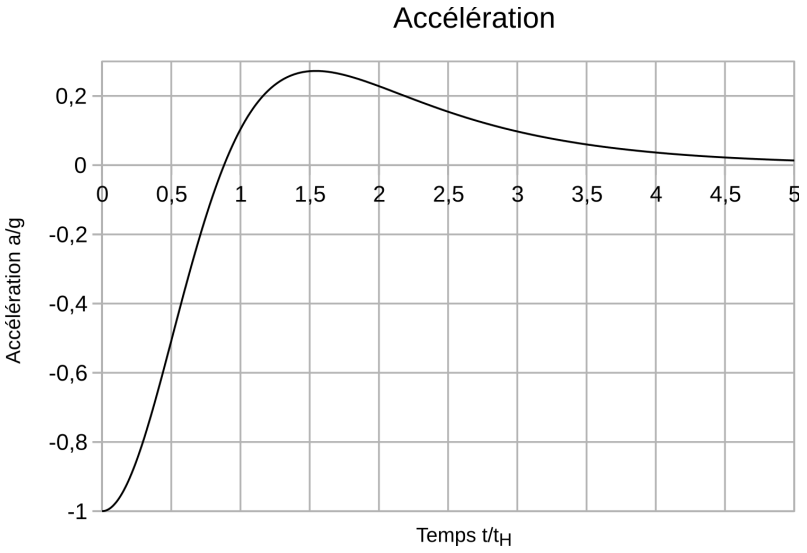
$$\beta = \frac{dX}{dT} = Y, \qquad \frac{\ddot{x}}{a} = \frac{dY}{dT} = [1-2(1+X)^2](1+X)$$

La vitesse maximale est atteinte pour T≃0,88 (t≃10 mois). L'horizon n'est atteint qu'asymptotiquement quand t tend

vers l'infini. Les courbes de la mécanique classique sont tracées en lignes grisées.





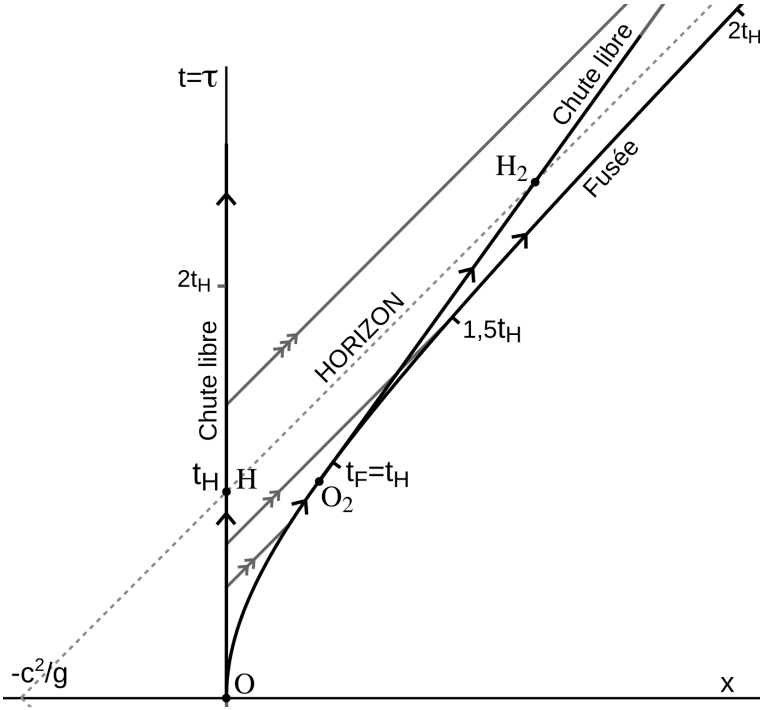


d- *Temps propre* : $\tau = \int \sqrt{g - \beta^2}\, dt = \int g\, dt$

$$\tau = t_H \int (1+X)^2 \frac{dX}{\beta} = -t_H \int \frac{(1+X)}{\sqrt{1-(1+X)^2}}\, dX$$

avec $\sin\theta = 1+X$ on trouve $\tau(X) = t_H \sqrt{1-(1+X)^2}$

Ainsi $\tau(x_H) = t_H$, pour l'observateur en chute libre l'horizon est atteint en un durée t_H et rien ne s'y passe de particulier. La personne traverse l'horizon sans s'en rendre compte et son temps continue, bien sûr, à s'écouler. Par contre, les observateurs de la fusée verront le temps du personnage en chute se figer à t_H et aussi longtemps qu'ils attendent ils ne sauront jamais la suite. Une différence, tout de même pour la personne en chute libre, avant et après l'horizon : avant il peut encore stopper sa chute pour rejoindre le vaisseau mère avec une fusée très rapide, après c'est impossible, même si sa fusée allait à la vitesse de la lumière.



Représentons la situation sur le diagramme de Minkowski du référentiel d'inertie de l'objet en chute libre. L'objet est lâché, sans vitesse initiale, par les astronautes de la fusée accélérée à t=0 et x=0 (événement O). Les occupants du vaisseau voient l'objet chuter (lignes d'Univers des photons avec les ➔) et le dernier photon vu viendra de H. Ainsi l'âge de l'objet en chute leur semblera se figer, comme si son temps s'arrêtait après avoir vieilli de t_H. Mais, du point de vue de l'objet, le temps continue à passer et nul mur d'horizon n'existe. Simplement, l'horizon définit le lieu de brisure du lien causal entre l'objet et la fusée. Même un photon envoyé vers la fusée au-delà de l'horizon ne pourra la rejoindre (➔➔➔). En O_2 les spationautes laissent tomber un deuxième objet. Celui-ci a une vitesse constante dans le référentiel d'inertie du premier objet et $\tau_{OH}=\tau_{O_2H_2}=t_H$. Le premier objet que les voyageurs voient tomber en chute libre est la Terre elle-même qu'ils ont "lâché" à leur départ.

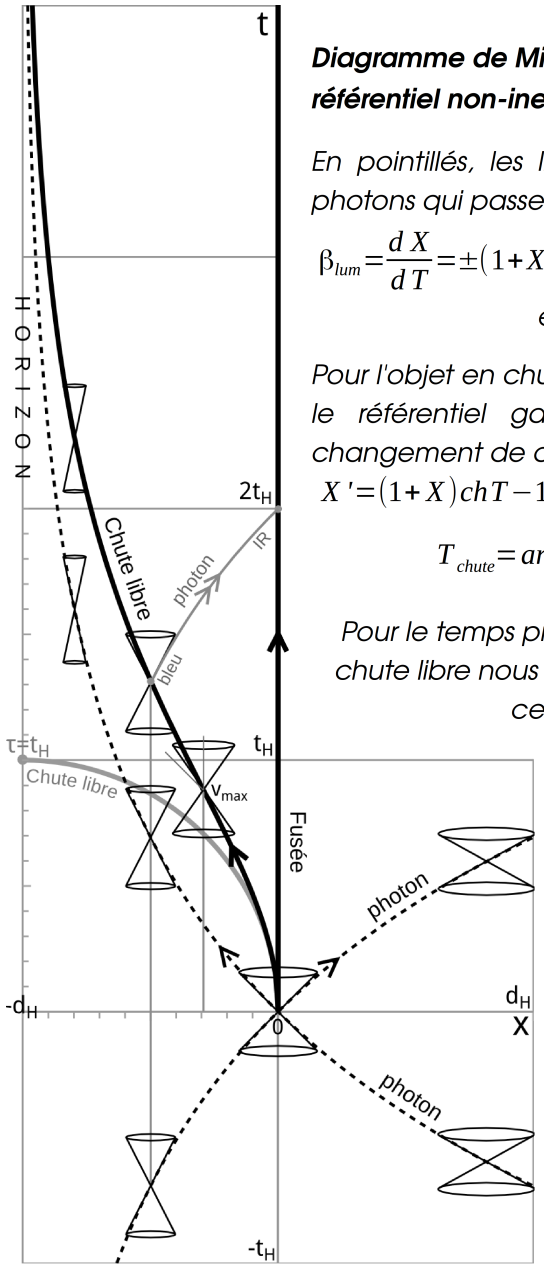


Diagramme de Minkowski dans le référentiel non-inertiel de la fusée :

En pointillés, les lignes d'univers des photons qui passent par O :

$$\beta_{lum}=\frac{dX}{dT}=\pm(1+X)$$

$$\text{et}\quad T_{lum}=\pm\ln(1+X).$$

Pour l'objet en chute libre, $X'=0$ *dans le référentiel galactique, avec le changement de coordonnées* $X'=(1+X)chT-1$*, nous obtenons :*

$$T_{chute}=argch\left(\frac{1}{1+X}\right)$$

Pour le temps propre de l'objet en chute libre nous avons un quart de cercle.

e- ***Repère minkowskien local*** **:**

$$dt_{Mink}=(1+X)dt$$

$$\beta_{Mink}=\frac{\beta}{(1+X)}$$

$$=\frac{\beta}{|\beta_{lum}|}$$

$$=-\sqrt{1-(1+X)^2}$$

Dans le référentiel local d'inertie la vitesse de l'objet croît continûment de zéro à *c*. La courbe a été tracée en gris clair sur la courbe des vitesses page 391 (arc de cercle).

3 - ***Analogie avec la chute dans un trou noir :***

a- $L(r,v)=\sqrt{g-\frac{1}{g}\frac{v^2}{c^2}}$ $\quad L-\frac{\partial L}{\partial v}v=cste \quad \frac{\partial L}{\partial v}=-\frac{v}{gLc^2}$

Vitesse : $L+\frac{\beta^2}{gL}=cst$ avec $\beta=\frac{v}{c}$ et $g(r)=1-\frac{r_S}{r}$

Détermination de la constante pour les conditions initiales d'un lâcher : à *t=0*, $r\rightarrow+\infty$, $\dot{r}=0$, $L(+\infty,0)=1$ et $cst=1$.

D'où : $gL^2+\beta^2=gL$ et $g^2L^4+2g\beta^2L^2+\beta^4=g^2L^2$

$g^4-2g^2\beta^2+\beta^4+2g^2\beta^2-2\beta^4+\beta^4=g^3-g\beta^2$ et $\beta=-g\sqrt{1-g}$

Expression de la vitesse : $v=-c\sqrt{g^2(1-g)}$

Calcul de l'accélération :

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dg}\frac{dg}{dr}\frac{dr}{dt}=-c\frac{2g-3g^2}{2\sqrt{g^2(1-g)}}\frac{(1-g)^2}{r_S}v$$

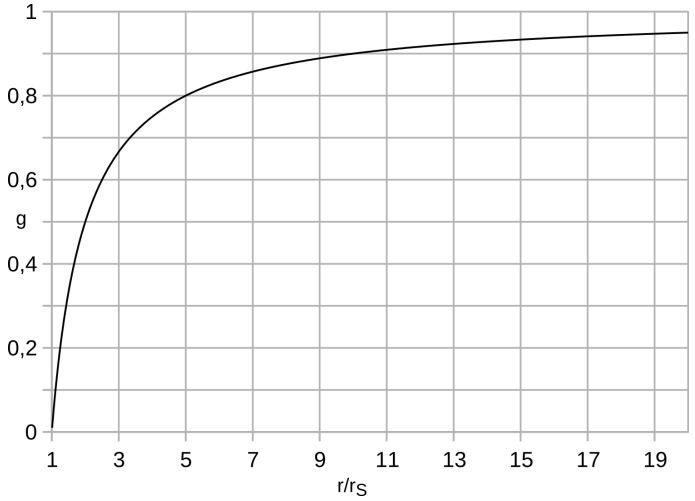
Accélération : $\frac{dv}{dt}=\frac{c^4}{4GM}g(2-3g)(1-g)^2$

L'accélération $\dot{v}$ s'annule en $g=2/3$. Comme attendu, vu que la vitesse est nulle au départ, pour *t=0,* et tend vers zéro quand t tend vers l'infini, elle passe par un maximum :

$$v_{max}=\frac{2}{3\sqrt{3}}c\simeq 38\%\ c \quad \text{en} \quad r(v_{max})=3r_S$$

La vitesse de la lumière en $r(v_{max})$ vaut 2/3 c et $v_{max}=v_{lum}/\sqrt{3}$. Vitesse de l'objet en chute libre pour un observateur minkowskien local : $v_{mink}(r_{max})=c/\sqrt{3}\simeq 58\%c$.

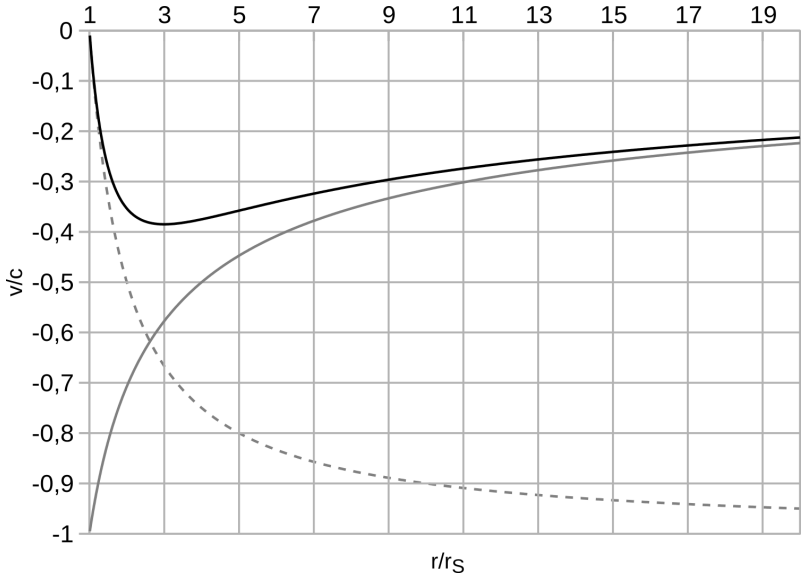
Facteur métrique g(r) :



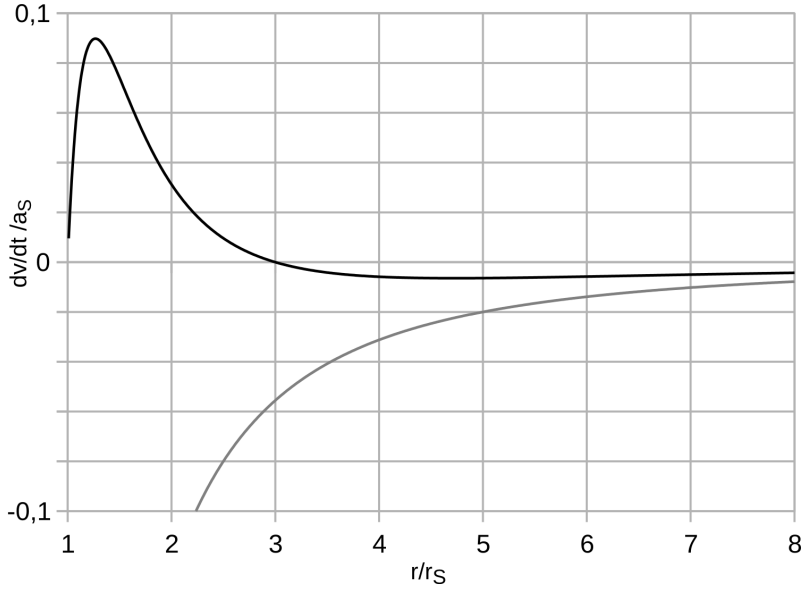
La métrique du référentiel de Schwarzschild s'exprime à l'aide du facteur $g(r)=1-r_S/r$.

Vitesse de chute de l'objet v(r) :

Courbe de la vitesse de chute d'un objet lâché à l'infini d'un astre massif. Pour un observateur extérieur, l'objet commence à chuter selon un mouvement classique (courbe grisée) pour ensuite atteindre sa vitesse maximale et voir sa vitesse s'annuler sur l'horizon dans le cas d'un trou noir (astre de rayon inférieur à r_S*). La vitesse maximale est atteinte si l'astre à un rayon inférieur à* $3\,r_S$*. Cette vitesse est la même pour tout astre et ne dépend pas de sa masse. Nous avons tracé en pointillés la vitesse coordonnée de la lumière dans ce référentiel non inertiel. Nous avons dans le système de coordonnées de Schwarzschild* $v_{lum}(r)=\pm(1-r_S/r)c$*. Ici* $|v_{lum}|<c$ *et la vitesse de la lumière s'annule sur l'horizon. La vitesse de l'objet est inférieure à celle de la lumière et l'égalise en* r_S *.*



Accélération de l'objet a(r) :



L'accélération s'annule en 3 r_S. En grisé l'accélération en gravitation newtonienne.

Nous introduisons des grandeurs sans dimensions :

$$R=\frac{r}{r_S},\quad T=\frac{t}{t_S},\quad A=\frac{d\beta}{dT}=\frac{\ddot{r}}{a_S}\quad\text{avec}\quad t_S=\frac{r_S}{c}\quad\text{et}\quad a_S=\frac{c^2}{r_S}.$$

$$\beta=-\left(1-\frac{1}{R}\right)\frac{1}{\sqrt{R}}\quad\text{et}\quad A=\frac{1}{2R^2}\left(1-\frac{1}{R}\right)\left(\frac{3}{R}-1\right)$$

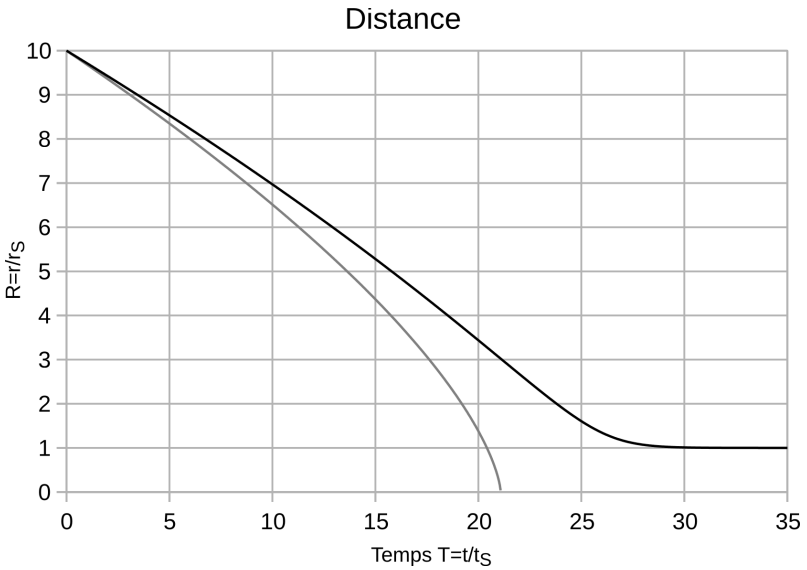
En gravitation de Newton :

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=0,\quad v=-\sqrt{\frac{2GM}{r}}\quad\text{et}\quad\beta=-\frac{1}{\sqrt{R}},$$

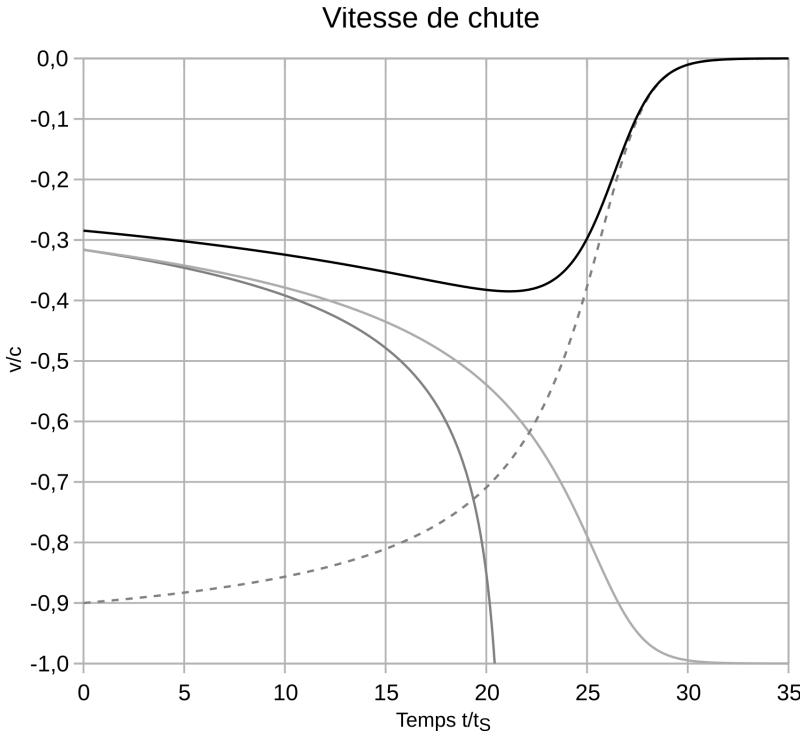
$$m\ddot{r}\vec{u}_r=\vec{F}=-\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r,\quad\ddot{r}=-\frac{GM}{r^2}\quad\text{et}\quad\frac{\ddot{r}}{a_S}=-\frac{1}{2R^2}.$$

b- Équations pour la résolution numérique :

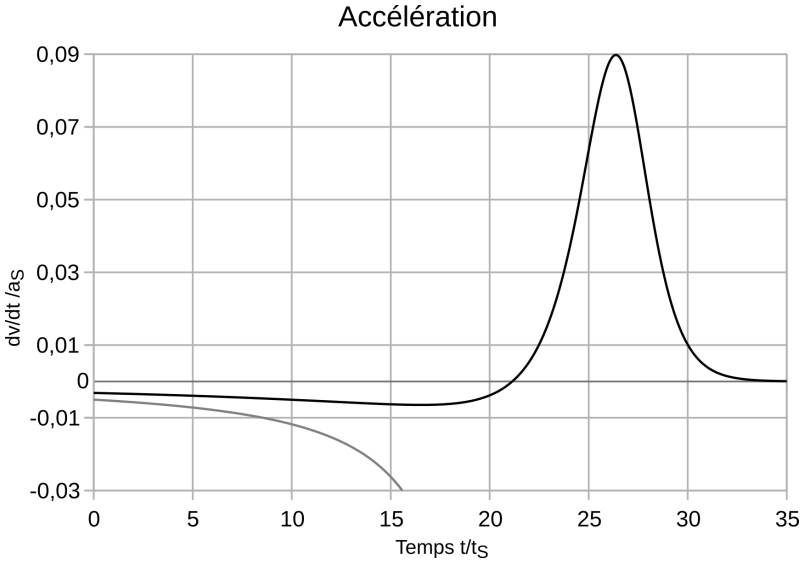
$$\beta=\frac{dR}{dT}=Y,\qquad\frac{\ddot{r}}{a_S}=\frac{dY}{dT}=F(R)$$



Du point de vue extérieur de Schwarzschild l'objet en chute libre met un temps infini pour rejoindre l'horizon en $r=r_S$. En grisé la courbe classique.



Le corps gagne de la vitesse au cours de sa chute jusqu'à 3 r_S. Depuis une distance de 10 r_S , il s'est alors écoulé environ 21 t_S avant d'atteindre ce maximum. Ce maximum de 38 % de c atteint, la vitesse décroît ensuite jusqu´à s'annuler sur l'horizon. La vitesse maximale est indépendante de la taille du trou noir, ce n'est pas le cas des distances et des durées. Pour un trou noir super-massif de 40 millions de masses solaires, t_S vaut environ 6 minutes et 35 secondes. En gris foncé la courbe de vitesse selon les lois de Newton. En pointillés la vitesse de la lumière dans le système de coordonnées de Schwarzschild.



L'accélération coordonnée de Schwarzschild s'annule pour ensuite changer de signe, former un pic et tendre vers zéro à l'horizon. En grisé la courbe classique.

Pour Newton : $\frac{dr}{dt}=-\sqrt{\frac{2GM}{r}}, \quad \sqrt{r}\,dr=-\sqrt{2GM}\,dt$

$$\int_{r_0}^{r}\sqrt{r}\,dr=-\sqrt{2GM}\,t \quad \text{et} \quad R=\left(R_0^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}T\right)^{\frac{2}{3}}$$

c- *Temps propre* : $\tau=\int\sqrt{g-\frac{\beta^2}{g}}dt=\int g\,dt$

$$\tau=t_S\int\left(1-\frac{1}{R}\right)\frac{dR}{\beta}=-t_S\int_{R_0}^{1}\sqrt{R}\,dR=\frac{2}{3}\left(R_0^{3/2}-1\right)t_S$$

Par exemple, à partir de la vitesse maximale, soit pour r=3 r_S , jusqu'à l'horizon en r=r_S , il s'écoule un temps propre de $\tau\simeq 2{,}8\,t_S$. Il est intéressant de constater que la singularité sur l'horizon a disparu. Nous pouvons calculer le temps propre nécessaire pour atteindre le centre du trou noir : $\tau=-t_S\int_1^0\sqrt{R}\,dR=\frac{2}{3}t_S$ soit environ 4 min 20 s pour le

trou noir super-massif de 40 millions de masses solaires. La personne en chute libre ne se rend pas compte qu'elle franchit l'horizon, mais à partir de ce point elle ne peut ressortir du trou noir et son lien causal avec le monde extérieur est brisé. Les observateurs extérieurs verront la personne en chute libre s'arrêter lentement sur l'horizon et son temps se figer au temps propre de passage.

d- *Repère local* : $dt_{Mink}=\sqrt{g}\,dt$, $dr_{Mink}=dr/\sqrt{g}$

$$\beta_{Mink}=\frac{dr_{Mink}}{dt_{Mink}}=\frac{\beta}{g}=\frac{\beta}{|\beta_{lum}|}=-\frac{1}{\sqrt{R}} \quad \text{et} \quad v_{Mink}(r_S)=-c$$

Dans le référentiel local et instantanément d'inertie la vitesse de l'objet atteint *c* sur l'horizon. La courbe a été tracée en gris clair sur la courbe des vitesses page 401.

e- *Comparaison aux données expérimentales* :

Théorie : pour un trou noir statique et une chute libre de l'infini sans vitesse initiale $\beta=\left(1-\frac{1}{R}\right)\frac{1}{\sqrt{R}}$.

Expérience :

Pour R=20 : $\beta\simeq 0{,}21$ à comparer à 0,3 mesuré.

Pour R=200 : $\beta\simeq 0{,}07$ à comparer à 0,1 mesuré.

Le trou noir concerné est en rotation et la matière en chute libre peut avoir une vitesse initiale. Les résultats sont cohérents pour l'ordre de grandeur et même en valeur. Il y a une incertitude sur le rayon et en théorie v_{max} peut atteindre 38 % de *c* ce qui est cohérent avec les 30 % expérimentaux. Si nous considérons les variations de la vitesse de la lumière dans le référentiel non-inertiel de Schwarzschild, et le référentiel minkowskien local, les différences ne sont pas significatives, car les *r* sont grands devant r_S.

5. Chute d'une boule bleue

Énoncé p167

La première boule bleue lâchée en chute libre est la planète Terre au départ de la fusée. Le comportement sera le même pour des lâchers ultérieurs. Notre planète, vue depuis le vaisseau, voit sa vitesse atteindre la moitié de la vitesse *c* après 10 mois à 0,3 a.l., quand le temps tend vers l'infini elle s'immobilise et se fige à une année-lumière.

Sa couleur est donnée par la formule de l'effet Doppler établie dans l'exercice *Téléréalité* page 129 :

$$\lambda_R = \lambda_E \, \mathrm{e}^{\frac{at}{c}}$$

Notre belle planète bleue sera perçue rouge après 8 mois de voyage. Si, au lieu de lâcher la boule bleue en chute libre, nous la suspendons à une corde, elle rougira aussi avec la longueur de corde déroulée, mais selon une relation différente.

6. Trajectoire des rayons lumineux dans l'ascenseur d'Einstein

Énoncé p167

1 - Position *x* de la boîte dans le référentiel galiléen :

$$\ddot{x} = a \quad \dot{x} = at \quad x = \frac{1}{2}at^2 \quad t_F = L/c \quad \Delta x = -\frac{aL^2}{2c^2}$$

$$y = ct \quad x(y) = -\frac{a}{2c^2}y^2 \quad y(x) = \sqrt{-\frac{2c^2 x}{a}} \quad v(x) = \sqrt{c^2 - 2ax}$$

2 - *Relativité restreinte.* Changement de coordonnées entre un référentiel inertiel (ct', x', y') et un référentiel uniformément accéléré (ct, x, y) (exercice sur la métrique de Rindler) :

$$\begin{cases} y' = ct' = y = \left(x + \dfrac{c^2}{a} \right) sh\left(\dfrac{at}{c} \right) \\ x' = 0 = \left(x + \dfrac{c^2}{a} \right) ch\left(\dfrac{at}{c} \right) - \dfrac{c^2}{a} \end{cases}$$

$$ch(at/c) = \frac{c^2/a}{x + c^2/a} \qquad sh(at/c) = \frac{y}{x + c^2/a}$$

$$c^4/a^2 - y^2 = (x + c^2/a)^2 \qquad y(x) = \sqrt{c^4/a^2 - (x + c^2/a)^2}$$

$$x(y) = \sqrt{c^4/a^2 - y^2} - c^2/a \qquad \Delta x = \sqrt{c^4/a^2 - L^2} - c^2/a$$

$$\Delta x = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 - \frac{a^2 L^2}{c^4}} - 1 \right) \qquad \lim_{L \ll d_H} (\Delta x)_{Restreinte} = (\Delta x)_{Newton}$$

Pour la vitesse coordonnée de la lumière dans *R* non-minkowskien, nous pouvons aussi utiliser directement la métrique :

$$d\tau = 0 \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{dl}{dt} = c\left(1 + \frac{ax}{c^2} \right)$$

Calcul direct :

$$\begin{cases} y(t) = \dfrac{c^2}{a} th\left(\dfrac{at}{c} \right) \\ x(t) = \dfrac{c^2}{a} \dfrac{1}{ch\left(\dfrac{at}{c} \right)} - \dfrac{c^2}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y} = c \dfrac{1}{ch^2} \\ \dot{x} = -c \dfrac{sh}{ch^2} \end{cases}$$

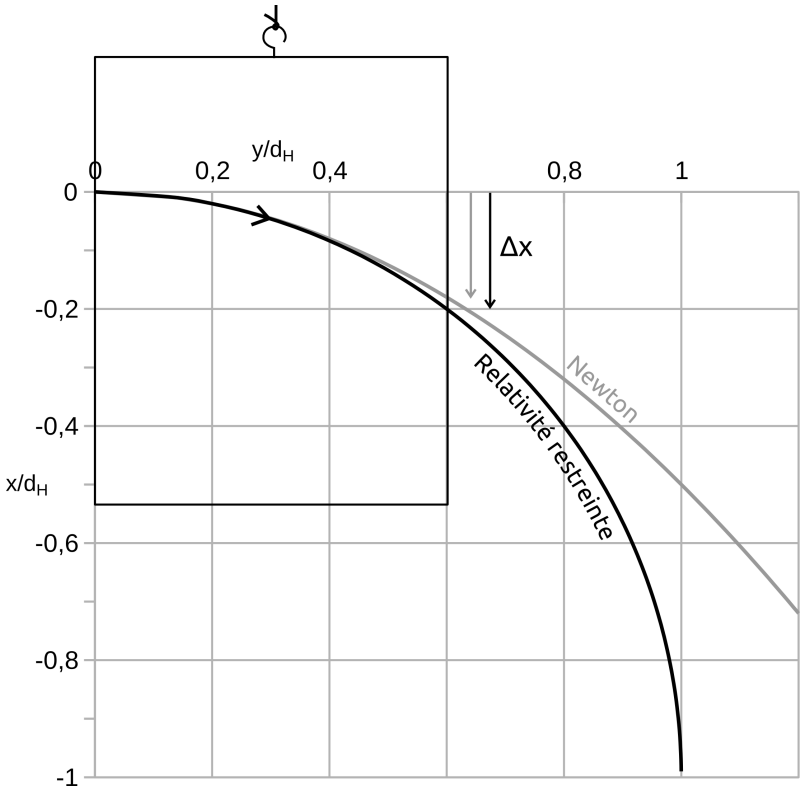
$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{c^2}{ch^4}(1 + sh^2) = c^2\left(1 + \frac{ax}{c^2} \right)^2$$

3 - Grandeurs sans dimensions : $d_H = \dfrac{c^2}{a} \quad X = \dfrac{x}{d_H} \quad Y = \dfrac{y}{d_H}$

Newton : $X = -\dfrac{Y^2}{2} \quad \beta = \dfrac{v}{c} = \sqrt{1 - 2X}$

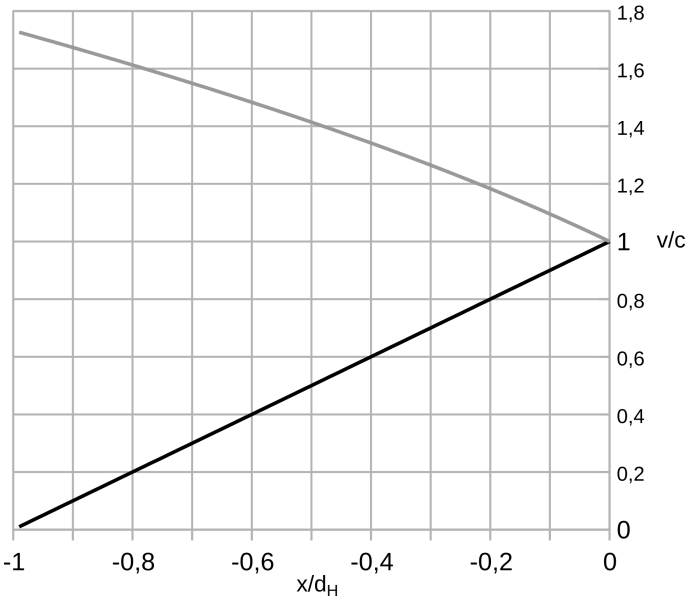
Relativité restreinte : $(X+1)^2 + Y^2 = 1 \quad \beta = 1 + X$

Trajectoire d'un rayon lumineux



Le rayon suit un quart de cercle de rayon d_H, distance d'horizon, et de centre $(-d_H, 0)$. La vitesse du photon diminue jusqu'à s'annuler, et, en un temps infini, le photon atteint la position $(-d_H, d_H)$. Dans l'approximation newtonienne la trajectoire est parabolique, la déviation est deux fois moindre à d_H, et la vitesse tend vers l'infini.

Vitesse des photons dans la boîte



La vitesse des photons initialement égale à c diminue linéairement jusqu'à s'annuler sur l'horizon. Au contraire, dans le cas de Newton en grisé, la vitesse augmente par addition des vitesses et tend vers l'infini comme celle de la boîte par rapport au référentiel galiléen.

7. Les coordonnées sphériques

Énoncé p 169

En plus de donner des outils utiles pour la physique et l'astronomie, nous introduisons la notion d'angle solide — approche très physique et peu expliquée. On se limite souvent aux angles plans alors que le monde est en 3D.

1 - $\vec{r}=\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$ $\quad \vec{u}_r=\dfrac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\left\|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right\|}$ $\quad \vec{u}_\theta=\dfrac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}}{\left\|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right\|}$ $\quad \vec{u}_\varphi=\dfrac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}}{\left\|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right\|}$

$$\begin{cases}\vec{u}_r=\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+\cos\theta\,\vec{k}\\ \vec{u}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j}-\sin\theta\,\vec{k}\\ \vec{u}_\varphi=-\sin\varphi\,\vec{i}+\cos\varphi\,\vec{j}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{i}=\sin\theta\cos\varphi\,\vec{u}_r+\cos\theta\cos\varphi\,\vec{u}_\theta-\sin\varphi\,\vec{u}_\varphi\\ \vec{j}=\sin\theta\sin\varphi\,\vec{u}_r+\cos\theta\sin\varphi\,\vec{u}_\theta+\cos\varphi\,\vec{u}_\varphi\\ \vec{k}=\cos\theta\,\vec{u}_r-\sin\theta\,\vec{u}_\theta\end{cases}$$

$$\vec{A}=A_x\,\vec{i}+A_y\,\vec{j}+A_z\,\vec{k}=A_r\,\vec{u}_r+A_\theta\,\vec{u}_\theta+A_\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

$$\begin{cases}A_x=A_r\sin\theta\cos\varphi+A_\theta\cos\theta\cos\varphi-A_\varphi\sin\varphi\\ A_y=A_r\sin\theta\sin\varphi+A_\theta\cos\theta\sin\varphi+A_\varphi\cos\varphi\\ A_z=A_r\cos\theta-A_\theta\sin\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_r=A_x\sin\theta\cos\varphi+A_y\sin\theta\sin\varphi+A_z\cos\theta\\ A_\theta=A_x\cos\theta\cos\varphi+A_y\cos\theta\sin\varphi-A_z\sin\theta\\ A_\varphi=-A_x\sin\varphi+A_y\cos\varphi\end{cases}$$

2 - $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=r\,\vec{u}_r$, $\vec{u}_r(\theta,\varphi)$, $\vec{dr}=dr\,\vec{u}_r+r\,d\,\vec{u}_r$.

$$d\,\vec{u}_r=\frac{\partial\,\vec{u}_r}{\partial\,\theta}\,d\,\theta+\frac{\partial\,\vec{u}_r}{\partial\,\varphi}\,d\,\varphi=\vec{u}_\varphi\wedge\vec{u}_r\,d\,\theta+\vec{u}_z\wedge\vec{u}_r\,d\,\varphi$$

d'où $\vec{dr}=dr\,\vec{u}_r+r\,d\,\theta\,\vec{u}_\theta+r\sin\theta\,d\,\varphi\,\vec{u}_\varphi$.

3 - $S=\int dS=\iint R\,d\theta\,R\sin\theta\,d\,\varphi=R^2\int_{\theta=0}^{\pi}d\theta\sin\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi=4\,\pi\,R^2$

$$V=\int dV=\iiint dr\,r\,d\,\theta\,r\sin\theta\,d\,\varphi=\int_{r=0}^{R}r^2\,dr\times4\,\pi=\frac{4}{3}\,\pi\,R^3$$

4-a-b Tout l'espace est vu sous un angle de 4π stéradians (surface d'une sphère unité). Un hémisphère sous 2π stéradians. D'un coin, on perçoit un huitième d'où π/2 stéradians. Sous un angle 2α :

$$S_{R=1}=\int_{\theta=0}^{\alpha}\sin\theta\,d\,\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\,\varphi=2\,\pi\,(1-\cos\alpha)$$

c- Probabilité pour une distribution isotrope d'étoiles :

$$p=1-\frac{2\times 2\pi(1-\cos\alpha)}{4\pi}=\cos\alpha \qquad p(\alpha=80°)\simeq 1/6$$

7.1. Changement de base

Énoncé p243

$$\tilde{e}_\mu=\Lambda^\nu{}_\mu\,\tilde{e}'_\nu \quad \text{et} \quad \Lambda^\mu{}_\nu=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

1 - Fusée : $\begin{cases} ct'=\left(x+\dfrac{c^2}{g}\right)sh\left(\dfrac{gt}{c}\right) \\ x'=\left(x+\dfrac{c^2}{g}\right)ch\left(\dfrac{gt}{c}\right)-\dfrac{c^2}{g} \end{cases}$ et $\begin{cases} T'=(1+X)\,sh\,T \\ X'=(1+X)\,ch\,T-1 \end{cases}$

$$\text{avec} \quad X=\frac{gx}{c^2} \quad \text{et} \quad T=\frac{gt}{c}$$

$$\Lambda^0{}_0=\frac{\partial ct'}{\partial ct}=(1+X)\,ch\,T, \qquad \Lambda^1{}_1=\frac{\partial x'}{\partial x}=ch\,T \quad ...$$

$$\text{et} \quad \Lambda^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix}(1+X)\,ch\,T & sh\,T\\ (1+X)\,sh\,T & ch\,T\end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_0=\Lambda^0{}_0\,\tilde{e}'_0+\Lambda^1{}_0\,\tilde{e}'_1 \quad ... \quad \begin{cases}\tilde{e}_0=(1+X)(ch\,T\,\tilde{e}'_0+sh\,T\,\tilde{e}'_1)\\ \tilde{e}_1=sh\,T\,\tilde{e}'_0+ch\,T\,\tilde{e}'_1\end{cases}$$

La base est orthogonale et nous retrouvons les composantes du tenseur métrique :

$$\tilde{e}_0\cdot\tilde{e}_0=(1+X)^2(ch^2T\,g'_{00}+sh^2T\,g'_{11}+0+0)=(1+X)^2=g(x)=g_{00}$$

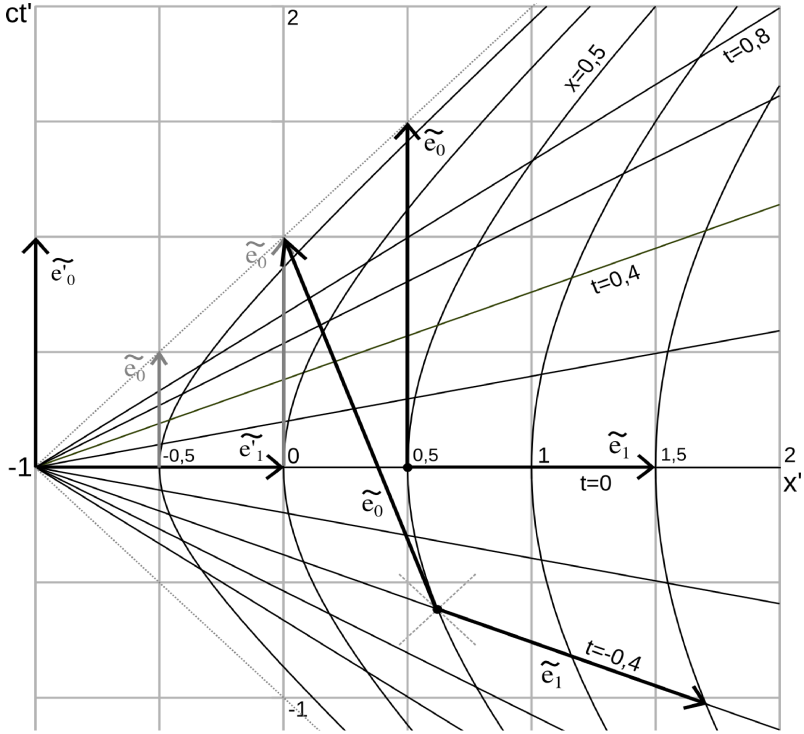
$$\tilde{e}_0\cdot\tilde{e}_1=(1+X)(sh\,T\,ch\,T-sh\,T\,ch\,T)=0=g_{01}=g_{10}$$

$$\tilde{e}_1\cdot\tilde{e}_1=sh^2T\,g'_{00}+ch^2T\,g'_{11}+2\,sh\,T\,ch\,T\,g'_{01}=-1=g_{11}$$

Pour T=-0,4 et X=0,5 : $\begin{cases} \widetilde{e}_0 \simeq\ 1{,}62\,\widetilde{e}\,'_0 - 0{,}62\,\widetilde{e}\,'_1 \\ \widetilde{e}_1 \simeq -0{,}41\,\widetilde{e}\,'_0 + 1{,}08\,\widetilde{e}\,'_1 \end{cases}$

Longueurs et angles sur la feuille euclidienne :

$$\begin{cases} \|\widetilde{e}_0\|_{Euclide} \simeq 1{,}73 \\ \|\widetilde{e}_1\|_{Euclide} \simeq 1{,}16 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\widehat{\widetilde{e}_0, \widetilde{e}\,'_0}) \simeq +20{,}8\,° \\ (\widehat{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}\,'_1}) \simeq -20{,}8\,° \end{cases}$$



Les vecteurs de base associés à la coordonnée temporelle propre à chaque référentiel sont tangents aux lignes d'Univers des particules au repos dans chacun de ces référentiels. Ils sont de genre temps et pointent vers le futur. Le référentiel est synchrone : $g_{0i}=0$ avec $i=1, 2$ ou 3.

2 - Disque : $\begin{cases} ct' = ct \\ \rho' = \rho \\ \theta' = \theta + \omega t \end{cases}$, $\Lambda^0{}_1 = \dfrac{\partial ct'}{\partial \rho} = 0$, $\Lambda^2{}_0 = \dfrac{\partial \theta'}{\partial ct} = \dfrac{\omega}{c}$ ...

d'où $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\omega/c&0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{cases}\widetilde{e}_0=\widetilde{e}'_0+\frac{\omega}{c}\widetilde{e}'_2\\\widetilde{e}_1=\widetilde{e}'_1\\\widetilde{e}_2=\widetilde{e}'_2\end{cases}$

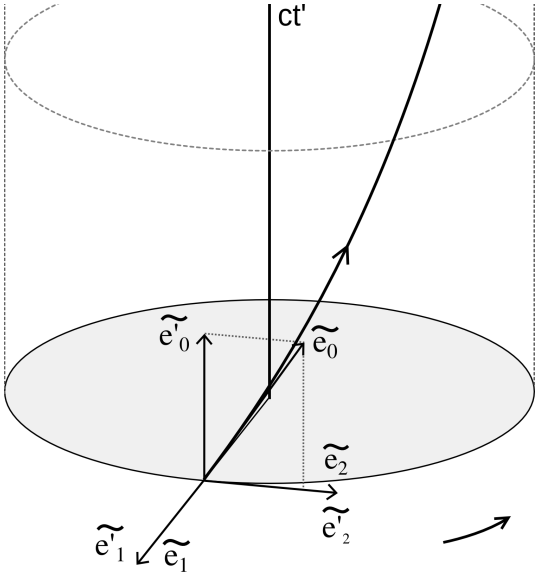
La base n'est pas orthogonale et le référentiel n'est pas synchrone car :

$$\widetilde{e}_0\cdot\widetilde{e}_2=g_{02}=\frac{\omega}{c}g'_{22}=-\frac{\rho^2\omega}{c}\neq 0$$

Nous retrouvons les composantes du tenseur métrique :

$$\widetilde{e}_0\cdot\widetilde{e}_0=g'_{00}+2\frac{\omega}{c}g'_{02}+\frac{\omega^2}{c^2}g'_{22}=1-\frac{\rho^2\omega^2}{c^2}=g_{00}\ \cdots$$

Dans le référentiel de Minkowski (ct, ρ, θ) de l'observateur inertiel, les lignes d'Univers des particules au repos dans le référentiel du disque tournant forment des hélices montantes, à pas constant et de rayon ρ. $\widetilde{e}_0$ est tangent aux lignes d'Univers et orienté selon le temps propre croissant. Ici, les vecteurs de la base spatiale $(\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_2,\widetilde{e}_3)$ ne sont pas tous orthogonaux aux lignes d'Univers des particules au repos qui définissent le disque.



2. Tenseur de courbure de Riemann *Énoncé p243*

1 -a- Fusée : $g_{\mu\nu}$ est ici diagonal, donc $g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}=\delta^{\mu}{}_{\alpha}$ devient $g^{\mu\mu}g_{\mu\mu}=\delta^{\mu}{}_{\mu}=1$ et $g^{\mu\mu}=1/g_{\mu\mu}$.

$$g_{00}=g,\quad g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1,\quad g^{00}=1/g,\quad g^{11}=g^{22}=g^{33}=-1.$$

b- Le seul terme dérivé non nul qui peut apparaître dans les connexions est $\partial_1 g_{00}=g'$. De plus, comme la métrique est diagonale, on a pour le premier facteur $g^{\alpha\beta}=g^{\alpha\alpha}$. Les seules connexions non nulles ont donc deux 0 et un 1 comme indices. Comme il y a symétrie sur les deux derniers indices il n'y a que 2 cas possibles :

$$\Gamma^{1}{}_{00}=\frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{10}+\partial_0 g_{10}-\partial_1 g_{00})=-\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{00}=\frac{g'}{2}$$

$$\Gamma^{0}{}_{01}=\Gamma^{0}{}_{10}=\frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{00}+\partial_0 g_{01}-\partial_0 g_{01})=\frac{1}{2}g^{00}\partial_1 g_{00}=\frac{g'}{2g}$$

c- Antisymétrie : $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\gamma}=0$ et $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}=-R^{\alpha}{}_{\beta\delta\gamma}$.

Aucuns indices 2 ou 3, sinon la composante du tenseur est nulle : Coefficient de connexion nul ou dérivée nulle (pas de dépendance en θ ou z). Que des indices 0 ou 1.

Il reste : $R^{0}{}_{001}$, $R^{1}{}_{101}$, $R^{1}{}_{001}$ et $R^{0}{}_{101}$.

$$R^{\alpha}{}_{\beta 01}=\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 1,0}-\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0,1}+\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma 0}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta 1}-\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma 1}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta 0}$$

le premier terme est nul $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 1,0}=\frac{\partial}{\partial ct}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 1}=0$

$$R^{0}{}_{001}=0-\Gamma^{0}{}_{00,1}+\Gamma^{0}{}_{\sigma 0}\Gamma^{\sigma}{}_{01}-\Gamma^{0}{}_{\sigma 1}\Gamma^{\sigma}{}_{00}$$

le deuxième terme est nul,

3ème : $\Gamma^{0}{}_{\sigma 0}\Gamma^{\sigma}{}_{01}=\Gamma^{0}{}_{00}\Gamma^{0}{}_{01}+\Gamma^{0}{}_{10}\Gamma^{1}{}_{01}+\Gamma^{0}{}_{20}\Gamma^{2}{}_{01}+\Gamma^{0}{}_{30}\Gamma^{3}{}_{01}$

$=0+0+0+0,$

dernier : $\Gamma^{0}{}_{\sigma 1}\Gamma^{\sigma}{}_{00}=\Gamma^{0}{}_{01}\Gamma^{0}{}_{00}+\Gamma^{0}{}_{11}\Gamma^{1}{}_{00}=0,$

donc $R^{0}{}_{001}=0.$

$$R^{1}{}_{101}=0-\Gamma^{1}{}_{10,1}+\Gamma^{1}{}_{\sigma 0}\Gamma^{\sigma}{}_{11}-\Gamma^{1}{}_{\sigma 1}\Gamma^{\sigma}{}_{10}=0-0+*\times 0-0\times *$$

donc $R^{1}{}_{101}=0.$

$$R^{1}{}_{001}=0-\Gamma^{1}{}_{00,1}+\Gamma^{1}{}_{\sigma 0}\Gamma^{\sigma}{}_{01}-\Gamma^{1}{}_{\sigma 1}\Gamma^{\sigma}{}_{00}=-\frac{g''}{2}+\frac{g'}{2}\times\frac{g'}{2g}$$

$$R^{1}{}_{001}=\frac{1}{2}\left(-g''+\frac{g'^{2}}{2g}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{2a^{2}}{c^{4}}+\frac{4a^{2}}{c^{4}}\frac{\left(1+\frac{ax}{c^{2}}\right)^{2}}{2\left(1+\frac{ax}{c^{2}}\right)^{2}}\right)$$

donc $R^{1}{}_{001}=0.$

$$R^{0}{}_{101}=0-\Gamma^{0}{}_{10,1}+\Gamma^{0}{}_{\sigma 0}\Gamma^{\sigma}{}_{11}-\Gamma^{0}{}_{\sigma 1}\Gamma^{\sigma}{}_{10}=-\frac{1}{2}\left(\frac{g''g-g'^{2}}{g^{2}}\right)+0-\frac{g'^{2}}{4g^{2}}$$

donc $R^{0}{}_{101}=0.$

Conclusion : dans le référentiel propre à la fusée uniformément accélérée, le tenseur de courbure est identiquement nul car toutes ses composantes sont nulles. Ce qui est logique, car si un tenseur est identiquement nul dans un référentiel, il l'est dans tous les référentiels (quels que soient les changements de coordonnées effectués). En effet, nous passons du référentiel inertiel galactique au référentiel de la fusée par un changement de coordonnées (donné dans l'exercice sur le système de coordonnées de Rindler). Or, dans un référentiel inertiel la courbure est nulle (tous les coefficients de la métrique sont indépendants des coordonnées). Finalement, l'espace-temps de la fusée est plat, ce qui n'empêche pas à des horloges immobiles l'une par rapport à l'autre de se désynchroniser, et, aux photons d'avoir des trajectoires courbes. Qu'on se le dise !

2 -a Disque :

$g_{00}=1-\frac{\rho^2\omega^2}{c^2}$, $g_{02}=-\frac{\rho^2\omega}{c}$, $g_{22}=-\rho^2$ et $g_{11}=g_{33}=-1$.

La métrique est diagonale selon 1 et 3 : $g^{11}=g^{33}=-1$.

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}=\delta^{\mu}{}_{\alpha} \qquad \begin{cases} g^{00}g_{00}+g^{02}g_{20}=\delta^{0}{}_{0}=1 \\ g^{00}g_{02}+g^{02}g_{22}=\delta^{0}{}_{2}=0 \end{cases} \qquad g^{20}g_{02}+g^{22}g_{22}=1$$

$$\begin{cases} g^{00}\left(1-\frac{\rho^2\omega^2}{c^2}\right)-g^{02}\frac{\rho^2\omega}{c}=1 \\ -g^{00}\frac{\rho^2\omega}{c}-g^{02}\rho^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} g^{00}=1 \\ g^{02}=-\frac{\omega}{c} \end{cases} \qquad g^{22}=\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}$$

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\omega}{c} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega}{c} & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b- $\partial_1 g_{00}=-2\frac{\rho\omega^2}{c^2}$, $\partial_1 g_{02}=-2\frac{\rho\omega}{c}$ et $\partial_1 g_{22}=-2\rho$.

18 connexions avec des 0, 1 et 2 :

$$\Gamma^{0}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{00}(\partial_\nu g_{0\mu}+\partial_\mu g_{0\nu}-\partial_0 g_{\mu\nu})+\frac{1}{2}g^{02}(\partial_\nu g_{2\mu}+\partial_\mu g_{2\nu}-\partial_2 g_{\mu\nu})$$

$$\Gamma^{0}{}_{00}=0 \qquad \Gamma^{0}{}_{01}=\frac{1}{2}g^{00}\partial_1 g_{00}+\frac{1}{2}g^{02}\partial_1 g_{20}=-\frac{\rho\omega^2}{c^2}+\frac{\omega}{c}\frac{\rho\omega}{c}=0$$

$$\Gamma^{0}{}_{02}=0 \qquad \Gamma^{0}{}_{11}=0 \qquad \Gamma^{0}{}_{22}=0$$

$$\Gamma^{0}{}_{12}=\frac{1}{2}g^{00}\partial_1 g_{02}+\frac{1}{2}g^{02}\partial_1 g_{22}=-\frac{\rho\omega}{c}+\frac{\omega}{c}\rho=0$$

$$\Gamma^1{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{11}(\partial_\nu g_{1\mu}+\partial_\mu g_{1\nu}-\partial_1 g_{\mu\nu}) \qquad \Gamma^1{}_{11}=0 \qquad \Gamma^1{}_{12}=0$$

$$\Gamma^1{}_{00}=-\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{00}=-\frac{\rho\omega^2}{c^2} \qquad \Gamma^1{}_{01}=0$$

$$\Gamma^1{}_{02}=-\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{02}=-\frac{\rho\omega}{c} \qquad \Gamma^1{}_{22}=-\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{22}=-\rho$$

$$\Gamma^2{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{20}(\partial_\nu g_{0\mu}+\partial_\mu g_{0\nu}-\partial_0 g_{\mu\nu})+\frac{1}{2}g^{22}(\partial_\nu g_{2\mu}+\partial_\mu g_{2\nu}-\partial_2 g_{\mu\nu})$$

$$\Gamma^2{}_{00}=0 \qquad \Gamma^2{}_{22}=0 \qquad \Gamma^2{}_{11}=0$$

$$\Gamma^2{}_{10}=\frac{1}{2}g^{20}\partial_1 g_{00}+\frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{20}=\frac{\rho\omega^3}{c^3}-\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\rho\omega}{c}=\frac{\omega}{\rho c}$$

$$\Gamma^2{}_{12}=\frac{1}{2}g^{20}\partial_1 g_{02}+\frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22}=\frac{\rho\omega^2}{c^2}-\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)\rho=\frac{1}{\rho}$$

Bilan :

$$\Gamma^1{}_{00}=-\frac{\rho\omega^2}{c^2} \quad \Gamma^1{}_{02}=-\frac{\rho\omega}{c} \quad \Gamma^1{}_{22}=-\rho \quad \Gamma^2{}_{10}=\frac{\omega}{\rho c} \quad \Gamma^2{}_{12}=\frac{1}{\rho}$$

c- Composantes du tenseur avec un indice 3 nulles.
Pas de connexion avec le premier indice nul : $R^0{}_{\beta\gamma\delta}=0$.
2x3x3=18 composantes à tester.

$$R^1{}_{001}=0-\Gamma^1{}_{00,1}+\Gamma^1{}_{\sigma 0}\Gamma^\sigma{}_{01}-0=\frac{\omega^2}{c^2}-\rho\frac{\omega}{c}\frac{\omega}{\rho c}=0$$
$$R^1{}_{101}=0-\Gamma^1{}_{10,1}+\Gamma^1{}_{\sigma 0}\Gamma^\sigma{}_{11}-\Gamma^1{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{10}=0$$
$$R^1{}_{002}=0-0+\Gamma^1{}_{\sigma 0}\Gamma^\sigma{}_{02}-\Gamma^1{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{00}=0$$
$$R^1{}_{202}=0-0+\Gamma^1{}_{\sigma 0}\Gamma^\sigma{}_{22}-\Gamma^1{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{20}=0$$
$$R^1{}_{112}=\Gamma^1{}_{12,1}-0+\Gamma^1{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{12}-\Gamma^1{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{11}=0$$
$$R^1{}_{212}=\Gamma^1{}_{22,1}-0+0-\Gamma^1{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{21}=-1+\rho\frac{1}{\rho}=0$$

$$R^1{}_{120}=0-0+\Gamma^1{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{10}-\Gamma^1{}_{\sigma 0}\Gamma^\sigma{}_{12}=-\frac{\omega}{c}+\frac{\omega}{c}=0$$

$$R^1{}_{012}=\Gamma^1{}_{02,1}-0+\Gamma^1{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{02}-\Gamma^1{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{01}=-\frac{\omega}{c}+\frac{\omega}{c}=0$$

$$R^1{}_{210}=\Gamma^1{}_{20,1}-0+\Gamma^1{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{20}-\Gamma^1{}_{\sigma 0}\Gamma^\sigma{}_{21}=-\frac{\omega}{c}+\frac{\omega}{c}=0$$

$$R^2{}_{001}=0-\Gamma^2{}_{00,1}+\Gamma^2{}_{\sigma 0}\Gamma^\sigma{}_{01}-\Gamma^2{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{00}=0$$

$$R^2{}_{101}=0-\Gamma^2{}_{10,1}+0-\Gamma^2{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{10}=\frac{\omega}{\rho^2 c}-\frac{1}{\rho}\frac{\omega}{\rho c}=0$$

$$R^2{}_{002}=0-0+\Gamma^2{}_{\sigma 0}\Gamma^\sigma{}_{02}-\Gamma^2{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{00}=-\frac{\omega}{\rho c}\frac{\rho\omega}{c}+\frac{1}{\rho}\frac{\rho\omega^2}{c^2}=0$$

$$R^2{}_{202}=0-0+\Gamma^2{}_{\sigma 0}\Gamma^\sigma{}_{22}-\Gamma^2{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{20}=\ldots=0$$

$$R^2{}_{112}=\Gamma^2{}_{12,1}-0+\Gamma^2{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{12}-\Gamma^2{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{11}=\ldots=0$$

$$R^2{}_{212}=\Gamma^2{}_{22,1}-0+\Gamma^2{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{22}-\Gamma^2{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{21}=0$$

$$R^2{}_{120}=0-0+\Gamma^2{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{10}-\Gamma^2{}_{\sigma 0}\Gamma^\sigma{}_{12}=0$$

$$R^2{}_{012}=\Gamma^2{}_{02,1}-0+\Gamma^2{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{02}-\Gamma^2{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{01}=0$$

$$R^2{}_{210}=\Gamma^2{}_{20,1}-0+\Gamma^2{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{20}-\Gamma^2{}_{\sigma 0}\Gamma^\sigma{}_{21}=0$$

Conclusion : dans le référentiel propre du disque en rotation uniforme la courbure spatio-temporelle est nulle (comme attendu). Dans un prochain exercice, nous verrons qu'il n'en est pas ainsi pour la courbure spatiale.

2 -a Astre sphérique : métrique diagonale

$$g_{00}=g=e^f,\quad g_{11}=-1/g=-e^{-f}\quad g_{22}=-r^2,\quad g_{33}=-r^2\sin^2\theta,$$

$$g^{00}=1/g=e^{-f},\quad g^{11}=-e^f,\quad g^{22}=-1/r^2,\quad g^{33}=-1/(r^2\sin^2\theta).$$

b- $g'=f'g$ et $g''=(f''+f'^2)g=-2r_S/r^3$ . ... .

Connexions : $\Gamma^0{}_{10}=f'/2$ $\Gamma^1{}_{11}=-f'/2$

$\Gamma^1{}_{00}=e^{2f}f'/2$ $\Gamma^2{}_{21}=\Gamma^3{}_{31}=1/r$ $\Gamma^1{}_{22}=-rg$

$\Gamma^1{}_{33}=-rg\sin^2\theta$ $\Gamma^2{}_{33}=-\sin\theta\cos\theta$ $\Gamma^3{}_{32}=1/\tan\theta$

c- $R^0{}_{101}=\Gamma^0{}_{11,0}-\Gamma^0{}_{10,1}+\Gamma^0{}_{\sigma 0}\Gamma^\sigma{}_{11}-\Gamma^0{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{10}$

$R^0{}_{101}=0-f''/2-(f'/2)^2-(f'/2)^2=-(f''+f'^2)/2=-g''/2\,g$

$$R^0{}_{101}=\frac{r_S}{g\,r^3} \quad \text{et} \quad R_{0101}=g_{0\mu}R^\mu{}_{101}=g_{00}\,R^0{}_{101}=\frac{r_S}{r^3}$$

Conclusion : il existe une composante du tenseur de courbure non nulle, l'espace-temps est donc courbe pour un astre sphérique. La courbure est une propriété intrinsèque à chaque espace-temps. L'espace-temps décrit par la métrique de Schwarzschild sera courbe quel que soit le référentiel d'observation.

Néanmoins, en cas de non nullité de l'ensemble des composantes, l'expression des composantes d'un tenseur dépendent quant-à elle du système de coordonnées. Nous pouvons obtenir une grandeur invariante en formant un scalaire. On montre que :

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}=12\,r_S^2/r^6 \quad \text{(scalaire de Kretschmann).}$$

Nous voyons que la singularité en r_S n'apparaît pas, par contre, la singularité en r=0 est visible. La singularité centrale est essentielle car présente dans tous les référentiels d'observation.

3.1- Disque en rotation non uniforme

Énoncé p245

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1-\rho^2\frac{\dot\lambda^2}{c^2} & 0 & -\rho^2\frac{\dot\lambda}{c} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\rho^2\frac{\dot\lambda}{c} & 0 & -\rho^2 \end{pmatrix} \qquad g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\dot\lambda}{c} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\dot\lambda}{c} & 0 & \frac{\dot\lambda^2}{c^2}-\frac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$$

Toujours $\partial_1 g_{00}=-2\frac{\rho\,\dot\lambda^2}{c^2}$, $\partial_1 g_{02}=-2\frac{\rho\,\dot\lambda}{c}$ et $\partial_1 g_{22}=-2\rho$.

Auxquelles s'ajoutent : $\partial_0 g_{00} = -2\rho^2 \frac{\dot{\lambda}\ddot{\lambda}}{c^2}$ et $\partial_0 g_{02} = -\rho^2 \frac{\ddot{\lambda}}{c}$.

Nous vérifions, un par une, les connexions précédemment calculées et nous constatons qu'elles ne sont pas modifiées :

$$\Gamma^1{}_{00} = -\frac{\rho\,\dot{\lambda}^2}{c^2} \quad \Gamma^1{}_{02} = -\frac{\rho\,\dot{\lambda}}{c} \quad \Gamma^1{}_{22} = -\rho \quad \Gamma^2{}_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{\rho c} \quad \Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{\rho}$$

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) + \frac{1}{2} g^{02}(\partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00})$$

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2} g^{00}\partial_0 g_{00} + g^{02}\partial_0 g_{20} = -\rho^2 \frac{\dot{\lambda}\ddot{\lambda}}{c^2} + \frac{\dot{\lambda}}{c}\rho^2 \frac{\ddot{\lambda}}{c} = 0 \quad \text{... ...}$$

$$\Gamma^2{}_{00} = \frac{1}{2} g^{20}\partial_0 g_{00} + g^{22}\partial_0 g_{20} = \frac{\dot{\lambda}}{c}\rho^2 \frac{\dot{\lambda}\ddot{\lambda}}{c^2} - \left(\frac{\dot{\lambda}^2}{c^2} - \frac{1}{\rho^2}\right)\rho^2 \frac{\ddot{\lambda}}{c} = \frac{\ddot{\lambda}}{c}$$

... ... seule nouvelle connexion non nulle : $\Gamma^2{}_{00} = \frac{\ddot{\lambda}}{c}$.

2 - Pareil, nous ne retranscrivons pas ici tous les calculs, mais toutes les composantes du tenseur de courbure sont bien nulles.

3 - Quel que soit le changement de coordonnées, si toutes les composantes d'un tenseur sont nulle dans un référentiel *R*, elles sont nulles dans tous référentiels *R'* :

$$R'^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda_{\beta}{}^{\nu}\Lambda_{\gamma}{}^{\rho}\Lambda_{\delta}{}^{\lambda} R^{\mu}{}_{\nu\rho\lambda} \qquad \Gamma'^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \neq \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda_{\beta}{}^{\nu}\Lambda_{\gamma}{}^{\rho}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}$$

Donc comme attendu le tenseur est nul, vu que nous partons d'un référentiel minkowskien. Nous en profitons pour faire remarquer que tout objet avec des indices n'est pas systématiquement un tenseur. Par exemple, la connexion n'est pas un tenseur. Elle est nulle pour toutes ses composantes en coordonnées cartésiennes dans *R*, et, non nulle dans *R'* en coordonnées polaires.

4. Courbures spatiales

Énoncé p246

1 - Fusée : Le référentiel est synchrone – pas de termes croisés dans la métrique entre t et les coordonnées d'espace x, y et z. L'espace est disjoint du temps, et nous reconnaissons directement la métrique euclidienne :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Espace plat.

2 - Astre sphérique : Là aussi, le référentiel est synchrone.

La métrique spatiale : $d\,l^2 = \frac{1}{g} dr^2 + r^2\, d\,\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\,\varphi^2$.

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} 1/g & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad \gamma^{ij} = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2\sin^2\theta) \end{pmatrix}$$

Calculons : $R^1{}_{212} = \Gamma^1{}_{22,1} - \Gamma^1{}_{21,2} + \Gamma^1{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{22} - \Gamma^1{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{21}$

$$\Gamma^1{}_{ij} = \frac{1}{2}\gamma^{11}\left(\partial_j \gamma_{1i} + \partial_i \gamma_{1j} - \partial_1 \gamma_{ij}\right) \qquad \Gamma^1{}_{22} = -\frac{1}{2} g\, \partial_1 \gamma_{22} = -rg$$

$$\Gamma^1{}_{11} = \frac{1}{2} g\, \partial_1 \gamma_{11} = -\frac{g'}{2g} \qquad \Gamma^2{}_{22} = 0 \qquad \Gamma^3{}_{22} = 0 \qquad \Gamma^1{}_{12} = 0$$

$$\Gamma^2{}_{21} = \frac{1}{2}\gamma^{22}\partial_1 \gamma_{22} = \frac{1}{2r^2} \times 2r = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^3{}_{21} = 0$$

donc $R^1{}_{212} = -g - r\,g' - 0 + r\,g'/2 + g = -r\,g'/2 = -\frac{r_S}{2r} \neq 0$.

Espace courbe.

3 -a- Disque : Le référentiel n'est pas synchrone : $g_{02} \neq 0$.

b- $\gamma_{11} = -g_{11} = 1 \qquad \gamma_{12} = \frac{g_{01} g_{02}}{g_{00}} = 0 \qquad \gamma_{13} = 0 \qquad \gamma_{23} = 0 \qquad \gamma_{33} = 1$

$$\gamma_{22} = -g_{22} + \frac{g_{02}^2}{g_{00}} = \rho^2 + \frac{\frac{\rho^4 \omega^2}{c^2}}{1 - \frac{\rho^2 \omega^2}{c^2}} = \gamma^2 \rho^2$$

avec le facteur de Lorentz : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2 \omega^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Métrique spatiale : $\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c- Le référentiel est stationnaire.

$$\frac{P}{D} = \frac{\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sqrt{\gamma_{22}}\, d\theta}{2 \int_{\rho=0}^{\rho} \sqrt{\gamma_{11}}\, d\rho} = \frac{\gamma \rho \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta}{2 \int_{\rho=0}^{\rho} d\rho} = \gamma \pi \qquad \text{(à t fixé } d\theta = d\theta')$$

$\frac{P}{D} > \pi$: l'espace est non euclidien, il est courbe.

Nous retrouvons l'intuition d'Albert Einstein. De part la contraction des longueurs due à la vitesse sur le bord du disque, l'expérimentateur sur le disque doit reporter sa règle unité de plus nombreuses fois que l'expérimentateur inertiel pour mesurer le périmètre. Par contre, il n'y a pas contraction selon le rayon et les deux mesures sont dans ce cas égales. Le "paradoxe" d'Ehrenfest est résolu.

Espace courbe.

d- $$R^1{}_{212} = \Gamma^1{}_{22,1} - \Gamma^1{}_{21,2} + \Gamma^1{}_{\sigma 1} \Gamma^\sigma{}_{22} - \Gamma^1{}_{\sigma 2} \Gamma^\sigma{}_{21}$$

$$\gamma' = \frac{1}{\rho} \beta^2 \gamma^3 \qquad \partial_1 \gamma_{22} = 2\gamma^2 \rho + 2\gamma \gamma' \rho^2 = 2\rho\gamma^4$$

$$\Gamma^1_{ij}=\frac{1}{2}\gamma^{11}\left(\partial_j\gamma_{1i}+\partial_i\gamma_{1j}-\partial_1\gamma_{ij}\right)\quad \Gamma^1_{11}=0\quad \Gamma^2_{22}=0\quad \Gamma^3_{22}=0$$

$$\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2}\gamma^{11}\partial_1\gamma_{22}=-\rho\gamma^4\qquad \Gamma^1_{12}=0$$

$$\Gamma^2_{21}=\frac{1}{2}\gamma^{22}\partial_1\gamma_{22}=\frac{\gamma^2}{\rho}\qquad \Gamma^3_{12}=0$$

$$R^1{}_{212}=-\gamma^4-4\rho\gamma^3\frac{1}{\rho}\beta^2\gamma^3+\gamma^6=-\gamma^4\left(1+4\beta^2\gamma^2-\gamma^2\right)=-3\beta^2\gamma^6$$

Aux symétries près, seule composante non nulle.
Le tenseur de courbure est nul au niveau de l'axe de rotation.

e- $R_{1212}=\gamma_{11}R^1{}_{212}=-3\beta^2\gamma^6$

$$K=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{R_{1212}}{\gamma_{11}\gamma_{22}}=-3\frac{\beta^2\gamma^4}{\rho^2}=-3\frac{\omega^2}{c^2}\gamma^4<0$$

Les rayons de courbure sont donc de signes opposés (comme sur un col, une selle de cheval ou l'intérieur d'un tore). La courbure augmente en s'éloignant de l'axe de rotation comme γ^4 (en valeur absolue).
À la surface d'une sphère, les courbures sur deux directions perpendiculaires sont quant à elles de mêmes signes :

$$dl^2=g(x,y)dx^2+g(x,y)dy^2\qquad g(x,y)=\frac{1}{\left(1+\frac{x^2+y^2}{4R^2}\right)^2}=\frac{1}{h^2}$$

$$\gamma_{ij}=\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\quad \partial_1\gamma_{11}=\partial_1\gamma_{22}=-\frac{x}{R^2h^3}\quad \partial_2\gamma_{11}=\partial_2\gamma_{22}=-\frac{y}{R^2h^3}$$

$$\Gamma^1_{11}=-\frac{x}{2R^2h}\quad \Gamma^2_{22}=-\frac{y}{2R^2h}\quad \Gamma^1_{22}=\frac{x}{2R^2h}\quad \Gamma^2_{11}=\frac{y}{2R^2h}$$

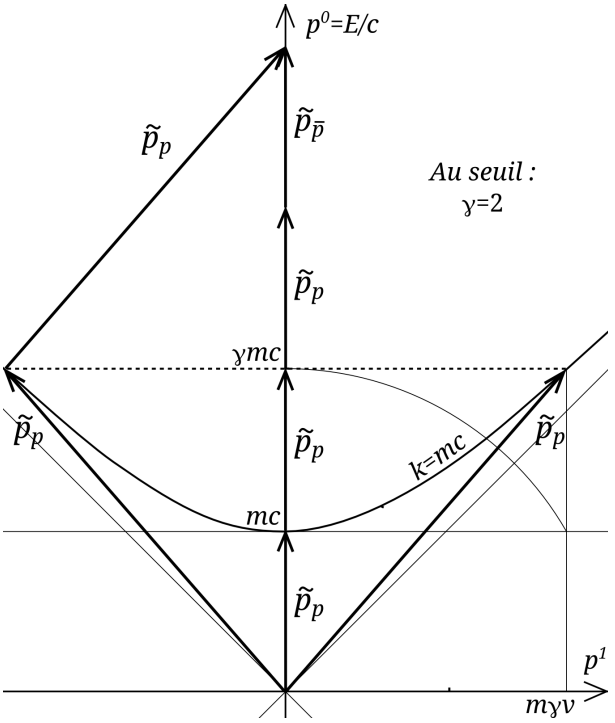
$$\Gamma^1_{12}=-\frac{y}{2R^2h}\qquad \Gamma^2_{12}=-\frac{x}{2R^2h}$$

$$R^1{}_{212}=\Gamma^1{}_{22,1}-\Gamma^1{}_{21,2}+\Gamma^1{}_{\sigma 1}\Gamma^\sigma{}_{22}-\Gamma^1{}_{\sigma 2}\Gamma^\sigma{}_{21}=\frac{1}{R^2h^2}$$

$$R_{1212}=\gamma_{11}R^1{}_{212}=\frac{1}{R^2h^4}\qquad K=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{1}{R^2}>0$$

5. Création de paires

Énoncé p248.



6. Équation de propagation

Énoncé p249.

1 -

$$d\varphi'=\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}dx'+\frac{\partial\varphi'}{\partial t'}dt'=\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}(dx-v\,dt)+\frac{\partial\varphi'}{\partial t'}dt$$

$$d\varphi'=\left[\frac{\partial}{\partial x'}dx+\left(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'}\right)dt\right]\varphi'$$

$$d\varphi=\left[\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial t}dt\right]\varphi$$

ainsi $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}$, $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'}$ et $\varphi=\varphi'$.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'^2}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\varphi'=0$$

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'^2}+\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'\partial x'}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2}=0$$

Équation qui diffère complètement de l'équation de d'Alembert. L'équation de propagation est établie dans le référentiel où le milieu de propagation est au repos. Par exemple, l'équation d'Alembert de l'onde sonore est valable dans le référentiel où le vent relatif est nul.

2 - $d\ =\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial ct}dct=\frac{\partial}{\partial x'}dx'+\frac{\partial}{\partial ct'}dct'$

$$d\ =\frac{\partial}{\partial x'}\gamma(dx-\beta\,dct)+\frac{\partial}{\partial t'}\gamma(dct-\beta dx)$$

$$d\ =\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\beta\frac{\partial}{\partial t'}\right)dx+\gamma\left(\frac{\partial}{\partial ct'}-\beta\frac{\partial}{\partial x'}\right)dct$$

$$\frac{\partial}{\partial ct}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial ct'}-\beta\frac{\partial}{\partial x'}\right)\qquad\frac{\partial}{\partial x}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\beta\frac{\partial}{\partial ct'}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'}\qquad\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\Box E_x=0$$

$$\left[\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\beta\frac{\partial}{\partial ct'}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial ct'}-\beta\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right]E_{x'}=0$$

$\gamma^2(1-\beta^2)=1$ et les doubles produits s'éliminent :

$$\Box'E_{x'}=0.$$

Pour les composantes selon *y* et *z*, il y a mélange :

$$\Box E_y = 0 \text{ et } \Box B_z = 0$$

$$\left[\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \beta\frac{\partial}{\partial ct'}\right)^2 - \gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \beta\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right]\gamma\left(E_{y'} + \beta c B_{z'}\right) = 0$$

$$\left[\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \beta\frac{\partial}{\partial ct'}\right)^2 - \gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \beta\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right]\gamma\left(B_{z'} + \beta E_{y'}/c\right) = 0$$

(1)-βc(2) donne $\Box' E_{y'} = 0$ et ainsi de suite pour les six équations. Nous avons bien dans ce cas invariance de l'équation d'onde, la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels d'inertie. L'éther, milieu supposé pour la propagation de la lumière, n'existe pas.

7. Équation de Schrödinger

Énoncé p250.

1 - Partons de l'équation de Schrödinger dans *R'* et montrons qu'elle est toujours vérifiée dans *R* :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t'} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi'}{\partial x'^2} \text{ avec } \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\Psi'}{\partial t} = \left(\frac{iE}{\hbar}\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

$$\frac{\partial\Psi'}{\partial x} = \left(-\frac{ip}{\hbar}\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

d'où $i\hbar\left[\left(\frac{iE}{\hbar}\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) + v\left(-\frac{ip}{\hbar}\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right]$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(-\frac{ip}{\hbar}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right) - \frac{ip}{\hbar}\left(-\frac{ip}{\hbar}\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right]$$

et $-E\Psi + i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} + v\,p\,\Psi + i\hbar v\frac{\partial\Psi}{\partial x}$

$$= \frac{1}{2}i\hbar v\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{p^2}{2m}\Psi + \frac{1}{2}i\hbar v\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

Finalement, on a bien : $i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$.

2 - Transformation de Lorentz des coordonnées :

$$i\hbar\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\beta\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi'=-\frac{\hbar^2}{2m}\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial ct}\right)^2\Psi'$$

Dans le membre de gauche nous n'avons que des dérivées premières, et, dans le membre de droite nous aurons un seul terme avec une dérivée temporelle seconde, qui ne pourra donc s'annuler, quel que soit le choix pour Ψ'. L'équation de Schrödinger ne fonctionne pas pour des particules relativistes.

8. Le champ électromagnétique

Énoncé p252.

1 - Composante temporelle :

$$\frac{dp^0}{d\tau}=F^{0\nu}j_\nu=F^{00}j_0+F^{01}j_1+F^{02}j_2+F^{03}j_3$$

$$\widetilde{j}=j^\mu=(q\gamma c,q\vec{u})\quad j_0=j^0\quad j_i=-j^i$$

$$\frac{dE/c}{d\tau}=0+\left(-\frac{E_x}{c}\right)(-qu^x)+\frac{E_y}{c}qu^y+qE_zu^z/c$$

$$\frac{dE}{d\tau}=q\vec{E}\cdot\vec{u}\quad\text{ou}\quad\frac{dE}{dt}=q\vec{E}\cdot\vec{v}$$

Nous retrouvons la puissance de la force électrique. La force magnétique ne travaille pas.

Composantes spatiales : $\dfrac{dp^i}{d\tau}=F^{i\nu}j_\nu$

$$\frac{dp^1}{d\tau}=F^{10}j_0+F^{11}j_1+F^{12}j_2+F^{13}j_3=q\gamma E_x-B_z(-qu^y)-B_yqu^z$$

$$\vec{g}=\frac{d\vec{p}}{d\tau}=\gamma q\vec{E}+q\vec{u}\wedge\vec{B}=\gamma q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$$

2 - $$F'^{\mu\nu}=\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}F^{\alpha\beta}$$

- $\frac{E'_x}{c}=F'^{10}=\Lambda^1{}_1\Lambda^0{}_0F^{10}+\Lambda^1{}_0\Lambda^0{}_1F^{01}$

(seules composantes non nulles)

$$\frac{E'_x}{c}=\gamma^2\frac{E_x}{c}+\beta^2\gamma^2\left(-\frac{E_x}{c}\right)\quad\text{d'où}\quad E'_x=E_x$$

- $\frac{E'_y}{c}=F'^{20}=\Lambda^2{}_2\Lambda^0{}_0F^{20}+\Lambda^2{}_2\Lambda^0{}_1F^{21}$

$$\frac{E'_y}{c}=\gamma\frac{E_y}{c}-\beta\gamma B_z\quad\text{d'où}\quad E'_y=\gamma(E_y-vB_z)$$

- $\frac{E'_z}{c}=F'^{30}=\Lambda^3{}_3\Lambda^0{}_0F^{30}+\Lambda^3{}_3\Lambda^0{}_1F^{31}$

$$\frac{E'_z}{c}=\gamma\frac{E_z}{c}-\beta\gamma(-B_y)\quad\text{d'où}\quad E'_z=\gamma(E_z+vB_y)$$

- $B'_x=F'^{32}=\Lambda^3{}_3\Lambda^2{}_2F^{32}$ d'où $B'_x=B_x$

- $B'_y=F'^{13}=\Lambda^1{}_0\Lambda^3{}_3F^{03}+\Lambda^1{}_1\Lambda^3{}_3F^{13}$

$$B'_y=-\beta\gamma\left(-\frac{E_z}{c}\right)+\gamma B_y\quad\text{d'où}\quad B'_y=\gamma\left(B_y+\beta\frac{E_z}{c}\right)$$

- $B'_z=F'^{21}=\Lambda^2{}_2\Lambda^1{}_0F^{20}+\Lambda^2{}_2\Lambda^1{}_1F^{21}$

$$B'_z=-\beta\gamma\frac{E_y}{c}+\gamma B_z\quad\text{d'où}\quad B'_z=\gamma\left(B_z-\beta\frac{E_y}{c}\right)$$

Les transformations de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont très différentes de la transformation de Lorentz.

Transformation du champ électromagnétique

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma\left(E_y - \beta c B_z\right) \\ E'_z = \gamma\left(E_z + \beta c B_y\right) \\ B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma\left(B_y + \beta E_z / c\right) \\ B'_z = \gamma\left(B_z - \beta E_y / c\right) \end{cases}$$

3 - $F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$. Seuls les termes diagonaux de la métrique sont non nuls d'où : $F_{\mu\nu} = g_{\mu\mu} g_{\nu\nu} F^{\mu\nu}$. Ils ne différeront donc, au plus, que d'un signe. Le tenseur reste antisymétrique et les éléments diagonaux nuls. Le bloc magnétique (sous-matrice 3x3) reste identique :

$$F_{ij} = g_{ii} g_{jj} F^{ij} = (-1)(-1) F^{ij} = F^{ij}$$

Les blocs électriques changent de signe :

$$F_{0j} = g_{00} g_{jj} F^{0j} = (+1)(-1) F^{0j} = -F^{0j}$$

$$\boldsymbol{F} = F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

4 - • Invariant $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$: 16 composantes dont 4 nulles, en reste 12 et 2 groupes de 6 analogues.

$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=$

$$F^{01}F_{01}+F^{10}F_{10}+F^{02}F_{02}+F^{20}F_{20}+F^{03}F_{03}+F^{20}F_{30}$$

$$+F^{12}F_{12}+F^{21}F_{21}+F^{13}F_{13}+F^{31}F_{31}+F^{23}F_{23}+F^{32}F_{32}$$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=-\frac{{E_x}^2}{c^2}\times 2-2\frac{{E_y}^2}{c^2}-2\frac{{E_z}^2}{c^2}+2\left({B_x}^2+{B_y}^2+{B_z}^2\right)$$

$$\text{Invariant : } \vec{B}^2-\frac{\vec{E}^2}{c^2}.$$

• Invariant $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$: le tenseur $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ possède 4^4 composantes dont 4!=24 non nulles.

$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}=$

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{0123}F_{01}F_{23}+\epsilon^{0132}F_{01}F_{32}+\epsilon^{0213}F_{02}F_{13}\\
&+\epsilon^{0231}F_{02}F_{31}+\epsilon^{0312}F_{03}F_{12}+\epsilon^{0321}F_{03}F_{21}\\
&+\epsilon^{1023}F_{10}F_{23}+\epsilon^{1032}F_{10}F_{32}+\epsilon^{1203}F_{12}F_{03}\\
&+\epsilon^{1230}F_{12}F_{30}+\epsilon^{1302}F_{13}F_{02}+\epsilon^{1320}F_{13}F_{20}\\
&+\epsilon^{2103}F_{21}F_{03}+\epsilon^{2130}F_{21}F_{30}+\epsilon^{2013}F_{20}F_{13}\\
&+\epsilon^{2031}F_{20}F_{31}+\epsilon^{2310}F_{23}F_{10}+\epsilon^{2301}F_{23}F_{01}\\
&+\epsilon^{3120}F_{31}F_{20}+\epsilon^{3102}F_{31}F_{02}+\epsilon^{3210}F_{32}F_{10}\\
&+\epsilon^{3201}F_{32}F_{01}+\epsilon^{3012}F_{30}F_{12}+\epsilon^{3021}F_{30}F_{21}
\end{aligned}$$

Chaque composante apparaît huit fois : les antisymétries sur chaque $F_{\mu\nu}$ compensées en signe par le $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$, et l'interversion des deux $F_{\mu\nu}$ qui correspond à deux permutations dans le $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$. Il n'y a donc que trois types de composantes :

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}=8\left(-E_xB_x-E_yB_y-E_zB_z\right)/c$$

$$\text{Invariant : } \vec{E}\cdot\vec{B}.$$

Invariants de Lorentz $\vec{B}^2-\dfrac{\vec{E}^2}{c^2}$ $\qquad$ $\vec{E}\cdot\vec{B}$

5 -a- La correction est succincte car la résolution est celle donnée dans un cours d'électrostatique.
Pour une plaque infinie de densité surfacique σ nous avons le champ électrique à l'intersection de deux plans de symétrie de la distribution de charge et de ce fait selon *z*. Nous choisissons la surface de Gauss classique pour trouver le champ. Nous appliquons le principe de superposition avec un deuxième plan de charge opposée distant de *e*. Conclusion : le champ électrique est nul en dehors des armatures et vaut à l'intérieur :

$$\vec{E}=-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_z$$

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sigma/\epsilon_0 c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma/\epsilon_0 c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(tenseur nul à l'extérieur des armatures)

b- Apparaît dans *R'* la densité surfacique de courant $\vec{j}_S=-\sigma\vec{v}$ sur le plan supérieur. Le champ magnétique est selon *y* car perpendiculaire au plan de symétrie de la distribution de courants. Nous appliquons d'abord le théorème d'Ampère au plan supérieur seul. Avec le contour rectangulaire classique nous trouvons le champ. À l'aide du principe de superposition nous trouvons un champ magnétique nul à l'extérieur des plaques, et à l'intérieur nous avons :

$$\vec{B}'=-\mu_0\sigma v\vec{u}_y$$

$$F'^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sigma/\epsilon_0 c \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_0 \sigma v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma/\epsilon_0 c & \mu_0 \sigma v & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(tenseur nul à l'extérieur des armatures)

c- Nous utilisons les formules de transformation des champs que nous avons précédemment établies :

$$E'_z=\gamma E_z \quad \text{et} \quad B'_y=\gamma\beta\frac{E_z}{c}=\gamma v\frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2}=-\gamma\mu_0\sigma v$$

$$F'^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma\sigma/\epsilon_0 c \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma\mu_0\sigma v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma\sigma/\epsilon_0 c & \gamma\mu_0\sigma v & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le résultat diffère d'un facteur γ. Pour un observateur relativiste de *R'* les longueurs de *R* sont contractées d'un facteur γ selon *x*. Ainsi les éléments de surface, qui contiennent des charges au repos, sont contractés et la densité surfacique est multipliée par γ. De même pour la densité de courant. Ce qui explique l'expression du tenseur : $\sigma'=\gamma\sigma$.

Invariants de Lorentz :

$$\vec{B}^2-\frac{\vec{E}^2}{c^2}=0-\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0 c}\right)^2=-\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 c^2}$$

$$\vec{B}'^2-\frac{\vec{E}'^2}{c^2}=\left(\gamma\beta\frac{\sigma}{\epsilon_0 c}\right)^2-\left(\gamma\frac{\sigma}{\epsilon_0 c}\right)^2=-\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 c^2}\gamma^2(1-\beta^2)=-\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 c^2}$$

Pour le second invariant, il est nul dans *R* car le champ magnétique est nul, et il est nul dans *R'* car les champs sont orthogonaux.

6- Dans le référentiel *R'* où les charges sont au repos, la

densité volumique de charges est plus faible d'un facteur γ par rapport à celle indiquée dans le référentiel du labo où les charges sont en mouvement. Nous appliquons le théorème de Gauss. Le champ électrique dans *R'* a pour expression en dehors de la distribution de charges :

$$\vec{E}' = -\frac{n e r^2}{2\gamma\rho\epsilon_0}\vec{u}_\rho \qquad (q=-e) \qquad \text{et} \qquad \vec{B}' = \vec{0}.$$

Dans le référentiel du laboratoire *R* : $\vec{E} = -\frac{n e r^2}{2\rho\epsilon_0}\vec{u}_\rho$.

Dans ce référentiel les charges sont en mouvement et apparaît un champ magnétique orthoradial. $\vec{v} = v\vec{u}_z$ et le courant est selon $-\vec{u}_z$. Le champ magnétique tourne donc dans le sens rétrograde. Pour la norme du champ nous utilisons un invariant de Lorentz :

$$\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2} = \vec{B}'^2 - \frac{\vec{E}'^2}{c^2}$$

$$\vec{B}^2 = \frac{\vec{E}^2}{c^2} - \frac{\vec{E}'^2}{c^2} = \left(\frac{n e r^2}{2\rho\epsilon_0 c}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \left(\frac{n e v r^2}{2\gamma\rho\epsilon_0 c^2}\right)^2$$

Finalement : $\vec{B} = -\frac{\mu_0 n e v r^2}{2\gamma\rho}\vec{u}_\theta$

9. Les équations de Maxwell *Énoncé p255.*

1 -a- Deuxième loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F}$. En mécanique classique la masse et la force sont invariantes : $m = m'$ et $\vec{F} = \vec{F}'$. L'accélération aussi ne change pas, car, pour une transformation de Galilée, *R'* est en translation rectiligne uniforme par rapport *R* : $\vec{v}_{R'/R} = \vec{cst}$ et $\vec{a} = \vec{a}'$. Ainsi, dans le nouveau référentiel d'inertie *R'*, la loi de Newton est aussi vérifiée : la force exercée sur un objet lui imprime une accélération égale au vecteur force divisé par la masse

de l'objet. À noter que ce n'est pas le cas dans un référentiel non galiléen, où, par exemple, un objet peut se mettre en mouvement sans qu'aucunes forces ne s'exerce sur lui (par l'intermédiaire de ce que l'on appelle parfois les forces fictives d'inertie).

b- La force magnétique n'est pas invariante sous la transformation de Galilée : $\vec{v} \neq \vec{v}\,'$. Nous considérons alors la somme de la force électrique et magnétique, appelée force de Lorentz, que nous croyons invariante de Galilée. En contre-partie les champs dépendent du référentiel :

$$R : \ \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \qquad R' : \ \vec{F}\,' = q\vec{E}\,' + q\vec{v}\,' \wedge \vec{B}\,'$$

$$\text{or } \vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}\,' \text{ et } \vec{F} = \vec{F}\,', \text{ d'où :}$$

$$\vec{E}\,' + \vec{v}\,' \wedge \vec{B}\,' = \vec{E} + (\vec{v}_e + \vec{v}\,') \wedge \vec{B} = (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) + \vec{v}\,' \wedge (\vec{B})$$

$$\begin{cases} \vec{E}\,' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \\ \vec{B}\,' = \vec{B} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = E_y - v B_z \\ E'_z = E_z + v B_y \\ B'_x = B_x \\ B'_y = B_y \\ B'_z = B_z \end{cases}$$

À gauche, les lois de transformation sous forme vectorielle qui sont générales et s'appliquent pour toutes les transformations de Galilée. Celles de droite correspondent à une transformation spéciale à laquelle nous pouvons toujours nous ramener par un choix convenable des axes. À partir des lois relativistes de transformation des champs données page 427 nous retrouvons les bonnes expressions en faisant tendre *c* vers l'infini.

c- Seconde équation : la divergence du champ magnétique est nulle, ce qui traduit la non-existence de monopôles magnétiques.
Le flux magnétique se conserve sur un tube de champs.
Elle est clairement invariante de Galilée car l'opérateur nabla et le champ magnétique le sont :

$$\text{Conclusion : } \quad \vec{\nabla}'\cdot\vec{B}'=\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0.$$

Première équation : $\vec{\nabla}'\wedge\vec{E}'=-\dfrac{\partial\vec{B}'}{\partial t'}$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{E}+\vec{v}_e\wedge\vec{B})=-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}+\vec{\nabla}\wedge(\vec{v}_e\wedge\vec{B})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-(\vec{v}_e\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}+\vec{v}_e(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_e)+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}_e-(\vec{v}_e\cdot\vec{\nabla})\vec{B}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-(\vec{v}_e\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

Le rotationnel du produit vectoriel donne 4 termes : le premier est nul ($\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$) et les deux suivants aussi car $\vec{v}_e$ est un vecteur constant (toutes les dérivées sont nulles).

$$\text{Conclusion : } \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

d- Troisième équation : expression locale du théorème de Gauss. La divergence du champ électrique est nulle en l'absence de charge, le flux électrique se conserve alors.

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{E}'=\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}+\vec{v}_e\wedge\vec{B})=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}+\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}_e\wedge\vec{B})=\vec{\nabla}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}_e)-\vec{v}_e\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})=0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{v}_e=\vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\vec{\nabla}'\wedge\vec{B}'=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}'}{\partial t}$$

$$\text{Conclusion : } \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\mu_0\epsilon_0\vec{v}_e\cdot\frac{\partial\vec{E}'}{\partial t}\neq 0$$

Quatrième équation : expression locale du théorème d'Ampère.

$$\vec{\nabla}' \wedge \vec{B}' = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \vec{\nabla} \right) (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \left(\vec{v}_e \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + (\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \right)$$

Nous avons trois termes en trop. Pour prouver que leur somme n'est pas identiquement nulle, il suffit de trouver une situation particulière où c'est le cas. Soit une transformation spéciale, dans ce cas $(\vec{v}_e \wedge \quad)_x = 0$ et $(\vec{\nabla} \wedge \vec{B})_x = \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_x + \mu_0 \epsilon_0 v \frac{\partial E_x}{\partial x}$. Le dernier terme n'a aucune raison d'être identiquement nul.

Conclusion : $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} \neq \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

2 -a- Nous pouvons considérer la transformée spéciale de Lorentz sans perdre en généralité.

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$

or $\frac{\partial}{\partial ct} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \beta \frac{\partial}{\partial x'} \right)$, $\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \beta \frac{\partial}{\partial ct'} \right)$,

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}.$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \gamma \left(\frac{\partial B'_x}{\partial x'} - \beta \frac{\partial B'_x}{\partial ct'} \right) + \gamma \frac{\partial (B'_y - \beta E'_z / c)}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial (B'_z + \beta E'_y / c)}{\partial z'}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \gamma \vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' - v \gamma \left(\frac{\partial B'_x}{\partial t'} + \left[\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} \right] \right)$$

Premier terme de droite nul et deuxième aussi car

composante selon *x* de la première équation de Maxwell.

Conclusion : $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$.

- $\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_x=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial t}$

$$=\gamma\frac{\partial\left(E'_z-\beta c B'_y\right)}{\partial y'}-\gamma\frac{\partial\left(E'_y+\beta c B'_z\right)}{\partial z'}+\gamma\left(\frac{\partial B'_x}{\partial t'}-v\frac{\partial B'_x}{\partial x'}\right)$$

$$=-\gamma v\vec{\nabla}'\cdot\vec{B}'+\gamma\left(\vec{\nabla}'\wedge\vec{E}'+\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'}\right)_{x'}=0$$

$$\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_y=\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial E'_x}{\partial z'}-\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\beta\frac{\partial}{\partial ct'}\right)\left(E'_z-\beta c B'_y\right)$$

$$+\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(B'_y-\beta E'_z/c\right)$$

$$=\frac{\partial E'_x}{\partial z'}-\left(1-\beta^2\right)\gamma^2\frac{\partial E'_z}{\partial x'}+\left(1-\beta^2\right)\gamma^2\frac{\partial B'_y}{\partial t'}+0+0$$

$$=\left(\vec{\nabla}'\wedge\vec{E}'+\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'}\right)_{y'}=0$$

$$\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_z=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$=\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\beta\frac{\partial}{\partial ct'}\right)\left(E'_y+\beta c B'_z\right)-\frac{\partial E'_x}{\partial y'}$$

$$+\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(B'_z+\beta E'_y/c\right)$$

$$=\left(1-\beta^2\right)\gamma^2\frac{\partial E'_y}{\partial x'}-\frac{\partial E'_x}{\partial y'}+\left(1-\beta^2\right)\gamma^2\frac{\partial B'_z}{\partial t'}+0+0$$

$$=\left(\vec{\nabla}'\wedge\vec{E}'+\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'}\right)_{z'}=0$$

Conclusion : $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

• $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \gamma \left(\frac{\partial E'_x}{\partial x'} - \beta \frac{\partial E'_x}{\partial ct'} \right) + \gamma \frac{\partial (E'_y + \beta c B'_z)}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial (E'_z - \beta c B'_y)}{\partial z'}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' - v\gamma \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \left[\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \right] \right)$$

Premier terme de droite nul et deuxième aussi car composante selon *x* de la quatrième équation de Maxwell.

Conclusion : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

• La vérification de l'invariance de Lorentz de la quatrième équation de Maxwell est laissé à la perspicacité du lecteur.

b- Équation de conservation de la charge : $\partial_\mu j^\mu = 0$.

avec $\tilde{j} = \rho_p \tilde{u} = (\rho c, \rho \vec{v})$ avec $\rho = \gamma \rho_p$.

Démonstration : $\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho c}{\partial ct} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

c- Condition de Lorentz : $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Démonstration : $\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial V/c}{\partial ct} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

Proposons le tenseur antisymétrique suivant :

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$$

Démonstration :

• $F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \frac{\partial A^x}{\partial ct} + \frac{\partial V/c}{\partial x}$

or $\vec{E}=-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ d'où $F^{01}=-\frac{E_x}{c}$.

- $F^{12}=\partial^1 A^2-\partial^2 A^1=-\frac{\partial A^y}{\partial x}+\frac{\partial A^x}{\partial y}=-(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})_z=-B_z$.

et ainsi de suite...

d- • $\partial_\mu F^{\mu 0}=\mu_0 j^0=\mu_0\rho c=\partial_1 F^{10}+\partial_2 F^{20}+\partial_3 F^{30}$

$\partial_x E_x/c+\partial_y E_y/c+\partial_z E_z/c=\rho/\epsilon_0 c$ et $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\epsilon_0$.

- $\partial_\mu F^{\mu i}=\mu_0 j^i$

$\partial_\mu F^{\mu 1}=\mu_0 j^x=\partial_0 F^{01}+\partial_2 F^{21}+\partial_3 F^{31}$

$-\partial_{ct} E_x/c+\partial_y B_z-\partial_z B_y=\mu_0 j^x$

$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}+(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})_x=\mu_0 j^x$

,,,

$\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

e- • $\partial^i F^{j0}+\partial^j F^{0i}+\partial^0 F^{ij}=0$ et $i\neq j$

$\partial^1 F^{20}+\partial^2 F^{01}+\partial^0 F^{12}=0=\partial^x E_y/c-\partial^y E_x/c-\partial_{ct} B_z$

$0=-(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})_z-\frac{\partial B_z}{\partial t}$ ... $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

- $\partial^1 F^{23}+\partial^2 F^{31}+\partial^3 F^{12}=0$

$-\partial^x B_x-\partial^y B_y-\partial^z B_z=\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

f- $\partial_\mu F^{\mu\nu}=\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)=\partial_\mu\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu\partial_\mu A^\mu=\mu_0 j^\nu$

$\partial_\mu\partial^\mu A^0-\partial^0\partial_\mu A^\mu=\mu_0 j^0$ et $\partial_\mu\partial^\mu A^i-\partial^i\partial_\mu A^\mu=\mu_0 j^i$

Soit : $\Box V-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=\frac{\rho}{\epsilon_0}$

Et : $\Box\vec{A}+\vec{\nabla}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=\mu_0\vec{j}$

Avec la condition de Lorentz : $\Box V=\frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\Box\vec{A}=\mu_0\vec{j}$.

Sous forme covariante : $\Box\widetilde{A}=\mu_0\widetilde{j}$ et $\partial_\mu\partial^\mu A^\nu=\mu_0 j^\nu$.

3 - Jauge : $\forall f \quad A'_\mu=A_\mu+\partial_\mu f$

D'où :

$$F'^{\mu\nu}=\partial^\mu A'^{\nu}-\partial^\nu A'^{\mu}=\partial^\mu\left(A^\nu+\partial^\nu f\right)-\partial^\nu\left(A^\mu+\partial^\mu f\right)$$

$$F'^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu+\partial^\mu\partial^\nu f-\partial^\nu\partial^\mu f=F^{\mu\nu}$$

Le tenseur des champs n'est pas modifié.

La condition de Lorentz $\partial_\mu A^\mu=0$ donne :

$$\partial_\mu A'^{\mu}=\partial_\mu\left(A^\mu+\partial^\mu f\right)=\partial_\mu A^\mu+\partial_\mu\partial^\mu f \quad \text{et} \quad \Box f=0.$$

8

1. Unités

Énoncé page 273

Unités de P : $[P]=W=\dfrac{J}{s}$

$$\left[\frac{2e^2}{3c^3}a^2\right]=\frac{C^2s^3N^2}{m^3kg^2}=\frac{C^2s^4N}{m^4kg^2}\frac{J}{s}=\frac{C^2}{m^2N}\frac{J}{s}$$

avec $N.m=J$ et $\dfrac{kg.m}{s^2}=N.$ Or $\left[\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]=\dfrac{Nm^2}{C^2}$ d'où pour obtenir une relation homogène :

$$P=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}a^2=\frac{e^2a^2}{6\pi\epsilon_0c^3}$$

2. Équation du mouvement relativiste

Énoncé p273

$$f_x=\frac{dp_x}{dt}=\frac{d}{dt}\left(m\frac{v_x}{\sqrt{1-\dfrac{v_x^2}{c^2}}}\right) \quad \text{et} \quad a_x=\frac{f_x}{m}\left(1-\frac{v_x^{\,2}}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

3. Quadriforce de freinage

Énoncé page 274

1- $\left(\dfrac{dw^\mu}{d\tau}-\dfrac{u^\mu u^\nu}{c^2}\dfrac{dw_\nu}{d\tau}\right)u_\mu=\dfrac{dw^\mu}{d\tau}u_\mu-\dfrac{u^\mu u_\mu u^\nu}{c^2}\dfrac{dw_\nu}{d\tau}=0$

car $u^\mu u_\mu=\widetilde{u}\cdot\widetilde{u}=c^2$ et $a^\mu b_\mu=g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu=b^\nu a_\nu$.

2- $g^1=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2e^2}{3c^3}\left(\dfrac{dw^1}{d\tau}-\dfrac{u^1u^0}{c^2}\dfrac{dw_0}{d\tau}-\dfrac{u^1u^1}{c^2}\dfrac{dw_1}{d\tau}\right)$ $\widetilde{u}=\gamma(c,v)$

$$\frac{dw^1}{d\tau}-\gamma^2\frac{v}{c}\frac{dw_0}{d\tau}-\gamma^2\frac{v^2}{c^2}\frac{dw_1}{d\tau}=\frac{dw^1}{d\tau}(1+\gamma^2\beta^2)-\gamma^2\beta\frac{dw^0}{d\tau}$$

$$w_1=g_{11}w^1=-w^1 \qquad w_0=g_{00}w^0=w^0 \qquad 1+\gamma^2\beta^2=\gamma^2$$

$$\widetilde{w}=\frac{d\widetilde{u}}{d\tau} \qquad \widetilde{u}=\frac{d\widetilde{x}}{d\tau}=\gamma\frac{d\widetilde{x}}{dt} \qquad u^1=\gamma v \qquad \frac{d\gamma}{dt}=\frac{va}{c^2}\gamma^3$$

$$w^1=\gamma\frac{d(\gamma v)}{dt}=\gamma\left(\frac{v^2a}{c^2}\gamma^3+\gamma a\right)=\gamma^2a(\beta^2\gamma^2+1)=\gamma^4a$$

$$\frac{dw^1}{d\tau}=\gamma\frac{d(\gamma^4a)}{dt}=\gamma\left(4\gamma^3\frac{va}{c^2}\gamma^3a+\gamma^4\frac{da}{dt}\right)=\gamma^5\left(\dot a+4\gamma^2\frac{va^2}{c^2}\right)$$

$$u^0=\gamma c\qquad w^0=\gamma\frac{d(\gamma c)}{dt}=\gamma\left(\frac{va}{c}\gamma^3\right)=\gamma^4\beta a$$

$$\frac{dw^0}{d\tau}=\gamma\frac{d(\gamma^4\beta a)}{dt}=\gamma\left(4\gamma^3\frac{v^2a^2}{c^3}\gamma^3+\gamma^4\frac{a^2}{c}+\gamma^4\beta\dot a\right)$$

$$=\gamma^5\left((1+4\gamma^2\beta^2)\frac{a^2}{c}+\beta\dot a\right)$$

$$\frac{dw^1}{d\tau}-\frac{u^1u^\nu}{c^2}\frac{dw_\nu}{d\tau}=$$

$$=\gamma^5\left[\left(\dot a+4\gamma^2\frac{va^2}{c^2}\right)(1+\gamma^2\beta^2)-\gamma^2\beta\left((1+4\gamma^2\beta^2)\frac{a^2}{c}+\beta\dot a\right)\right]$$

$$=\gamma^5\left(\dot a+3\gamma^2\frac{va^2}{c^2}\right)$$

$$g=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\gamma^5\left(\dot a+3\gamma^2\frac{va^2}{c^2}\right)=\gamma f$$

4. Intensité du quadripotentiel

É. p274

Dans le plan de Minkowski avec les signes qui correspondent à l'exemple du cours :

$$\tilde r=r(1,-1)\quad\tilde u=\gamma c(1,-\beta)\quad\tilde r\cdot\tilde u=r\gamma c(1-\beta)\quad\tilde u\cdot\tilde u=c^2$$

$$\tilde A\cdot\tilde A=\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{(1+\beta)}{r^2(1-\beta)}\qquad k_A=\frac{|q|}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

9 .1. Chiffres

Énoncé page 305

- v=61 000 km/h, d=4 al. t=d/v

$$t_a = \frac{d_{al}}{\beta} = 4 \times 3.10^8 \frac{3,6}{61000} \simeq 70820\, ans$$

- $E = 15.10^9 \times 42.10^9 = 63.10^{19}\, J/an$

$$m = \frac{1}{2}\frac{E}{c^2} = \frac{1}{2}\frac{63.10^{19}}{9.10^{16}} = 3500\, kg/an$$

- Le flux antiprotonique interplanétaire est le même dans tout le système solaire. R est le rayon d'influence de la magnétosphère de l'astre :

$$\frac{\Phi_{héliosphère}}{4\pi R_{héliosphère}^{\ 2}} = \frac{\Phi_{planète}}{4\pi R_{planète}^{\ 2}}$$

Pour une héliopause à 100 unités astronomiques :

$$\Phi_h = \Phi_J \left(\frac{R_h}{45\, R_J}\right)^2 \simeq 9,1 \left(\frac{100 \times 150.10^6}{45 \times 69911}\right)^2 \qquad \Phi_h \simeq 207.10^6\, kg/an$$

En dehors de héliosphère le rayonnement cosmique est plus important, car il n'est pas repoussé par le Soleil. Si l'on évalue vers le maximum des courbes à 2 Gev :

$$\varphi_{interne(max)} \simeq 0,015 \left(m^2.s.sr.GeV\right)^{-1}$$

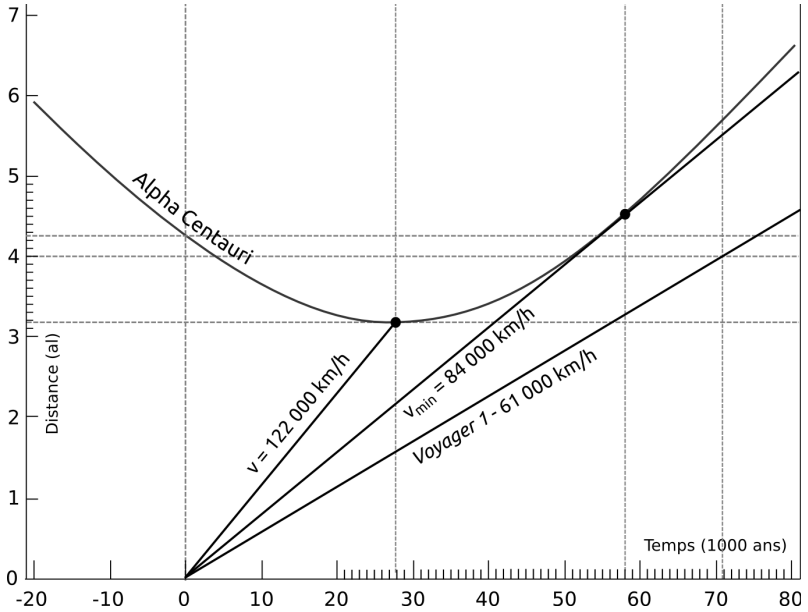
$$\varphi_{interne(min)} \simeq 0,022 \left(m^2.s.sr.GeV\right)^{-1}$$

$$\varphi_{interne(moy)} \simeq 0,019 \left(m^2.s.sr.GeV\right)^{-1}$$

$$\varphi_{externe} \simeq 0,034 \left(m^2.s.sr.GeV\right)^{-1}$$

$$\frac{\varphi_{externe}}{\varphi_{interne}} \simeq 1,8 \quad \text{et} \quad \Phi_{ext} \simeq 370\ 000\ t/an\ .$$

2. Évolution de la distance des étoiles *Énoncé p309*



$v \simeq 34\,km/s$ $v_{min} \simeq 23\,km/s$ $v_{V1} \simeq 17\,km/s$

3. Effet de fronde *Énoncé page 309.*

a - Loi de composition des vitesses : $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

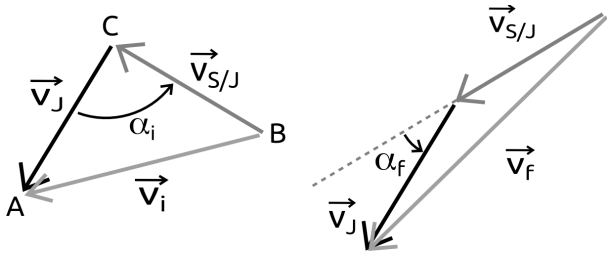
$\vec{v}_a = \vec{v}_R(M)$: vitesse "absolue".

$\vec{v}_e = \vec{v}_R(0') + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_R(0')$: vitesse d'entraînement (le référentiel planétocentrique est en mouvement de translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique).

$\vec{v}_r = \vec{v}_{R'}(M)$: vitesse relative.

D'où l'expression de la vitesse héliocentrique de la sonde : $\vec{v} = \vec{v}_J + \vec{v}_{S/J}$.

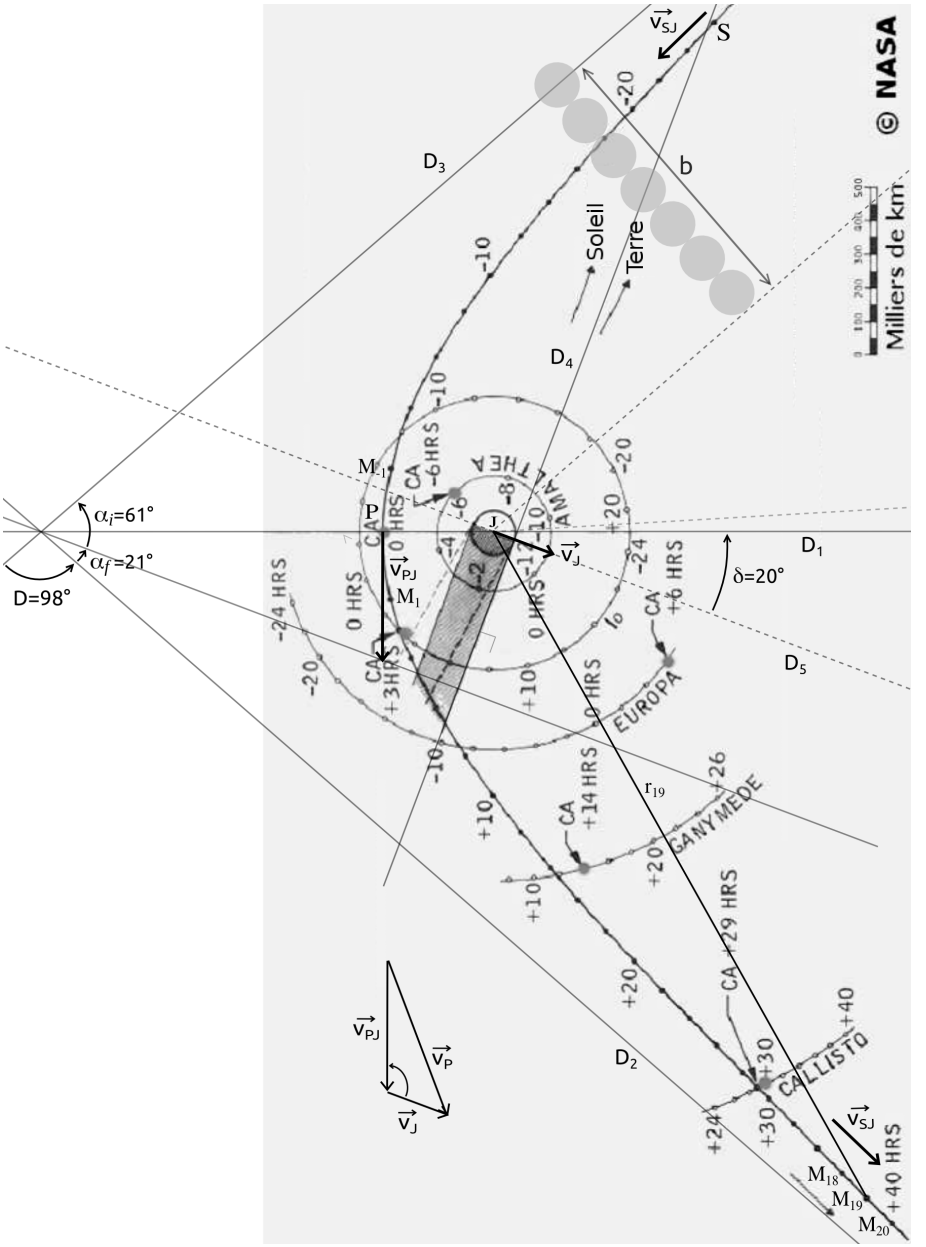
Sur le graphique fourni par la NASA, la trajectoire de la sonde est représentée dans le référentiel qui a pour origine Jupiter et directions des étoiles lointaines supposées fixes. Cette trajectoire est hyperbolique, symétrique et la vitesse planéto-centrique de la sonde $\vec{v}_{S/J}$ est tangente à cette trajectoire. Le temps de la déviation, la vitesse héliocentrique de Jupiter peut être considérée comme un vecteur constant :



Nous estimons α_i et α_f sur le graphique. La droite D_2 est placée selon l'asymptote évaluée en $+\infty$. La droite D_1 est l'axe central et la deuxième asymptote D_3 est obtenu par symétrie. L'angle entre D_2 et D_1 est évaluée à 41°. La déviation D vaut donc environ 98°. Le mouvement héliocentrique de Jupiter est supposé circulaire, la vitesse de Jupiter est donc orthoradiale selon D_5 et perpendiculaire à la droite D_4 alignée selon l'ombre du Soleil à grande distance.

Angle entre D_5 et D_3 : $\alpha_i \simeq 61°$.

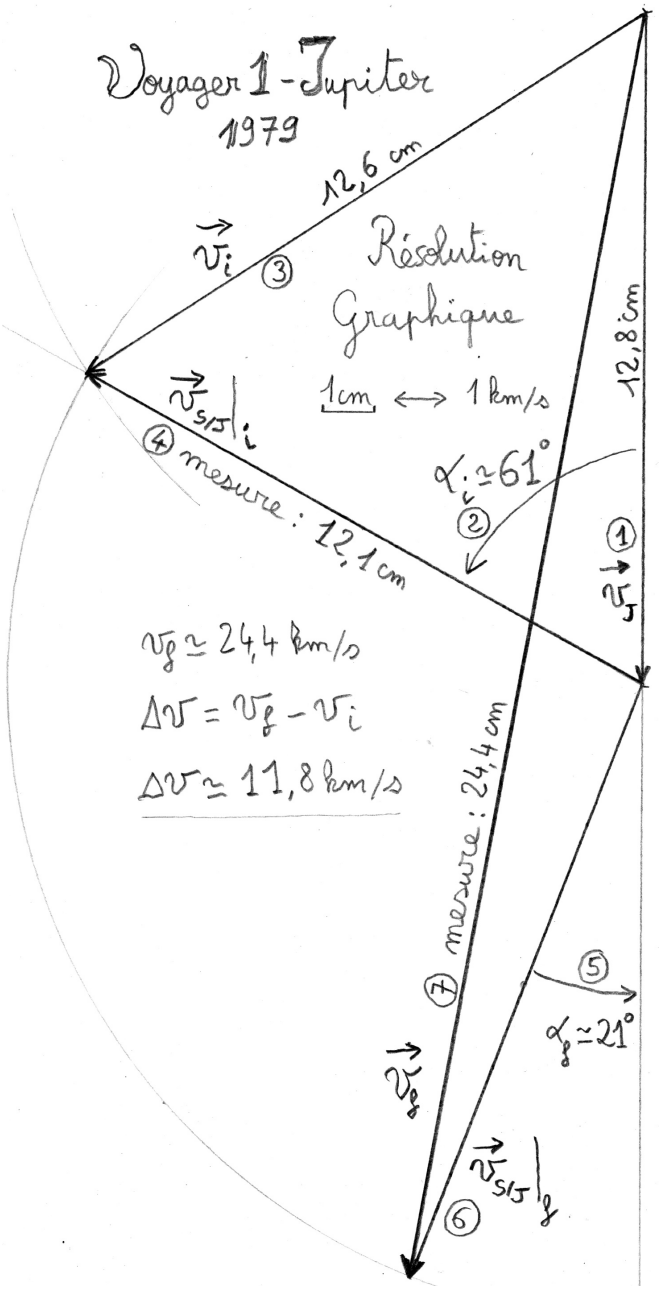
Angle entre D_2 et D_5 : $\alpha_f \simeq 21°$.



Résolution géométrique :

Nous allons réaliser une construction graphique avec une règle graduée, un compas et un

rapporteur. Les résultats sont indiqués sur le dessin.



Résolution analytique :

Appliquons les propriétés trigonométriques des triangles : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}$

d'où : $v_i^{\,2}=v_J^{\,2}-2\,v_J v_{SJ}\cos\alpha_i+v_{SJ}^{\,2}$ (1)

et : $v_f^{\,2}=v_J^{\,2}+2\,v_J v_{SJ}\cos\alpha_f+v_{SJ}^{\,2}$ (2)

c_f(1)+c_i(2) : $v_{SJ}^{\,2}=\dfrac{c_f v_i^{\,2}+c_i v_f^{\,2}}{c_i+c_f}-v_J^{\,2}$

Nous obtenons après quelques calculs une équation du second degré en $v_f^{\,2}$ et finalement :

$$v_f=\sqrt{v_i^{\,2}+2(c_i+c_f)v_J\left[c_i v_J\pm\sqrt{v_i^{\,2}-s_i^{\,2}v_J^{\,2}}\right]}$$

Cas limite : $\alpha_i=\alpha_f=0$

Cas de la déviation maximale / demi-tour : $D=\pi$.

Nous obtenons : $\Delta v=v_f-v_i=\pm 2\,v_J$ OK.

Le signe change selon que $\vec{v}_i$ soit dans le sens contraire de $\vec{v}_J$ ou dans le même sens. Quand je tire avec une balle sur l'arrière du train quand il s'éloigne, la balle est ralentie (la balle atteint le train si $v_i>v_J$).

Cas limite : $\alpha_i+\alpha_f=\pi$ (pas de déviation)

$c_i+c_f=\cos\alpha_i+\cos(\pi-\alpha_i)=0$ et $v_f=v_i$ OK.

Application numérique :

$$v_i=12{,}6\,km/s\ ,\quad v_J=12{,}8\,km/s$$

d'où $v_f\simeq 24{,}4\,km/s$ et $\Delta v\simeq 11{,}8\,km/s$

Valeurs conformes avec celles observées sur la courbe page 283.

b - Nous estimons la vitesse au périastre avec la vitesse moyenne entre M_{-1} et M_1 : $v_{PJ} \simeq 28\,km/s$.

Dans le référentiel héliocentrique :

$$v_P{}^2 = v_J{}^2 - 2\,v_J\,v_{PJ}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) + v_{PJ}{}^2$$

et $v_P \simeq 37\,km/s$ (comme sur le profil de vitesse)

Théorème du moment cinétique :

$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{r}\wedge\vec{F} = \vec{0}$ (force centrale) et $\vec{\sigma} = m\,\vec{r}\wedge\vec{v} = \overrightarrow{cst}$

d'où : $b\,v_{SJ} = r_{min}\,v_{PJ}$ avec $v_{SJ} = v_\infty$

Nous estimons v_{19} sur le graphique de la NASA et avec la conservation de l'énergie mécanique nous trouvons v_∞ puis b :

$$\frac{1}{2}v_{19}{}^2 - \frac{GM_J}{r_{19}} = \frac{1}{2}v_\infty{}^2 \quad \text{et} \quad b = \frac{v_{PJ}}{v_{SJ}}r_{min} \simeq 12\,R_J$$

c - $p = \frac{r_{min}^2\,v_{PJ}{}^2}{G\,M_J} \simeq 11{,}5\,R_J$

Au périastre $\theta = 0$, $r_{min} = \frac{p}{1+e}$ et $e = \frac{p}{r_{min}} - 1 \simeq 1{,}3 > 1$.

De plus : $\theta_{max} = arcos\left(-\frac{1}{e}\right) \simeq 139°$,

or $\alpha_f + \alpha_i = 2\pi - 2\theta_{max} = \pi - D$ et $D \simeq 98°$.

d - • D'après la formule, nous constatons que v_f est maximale pour $c_f = 1$, soit $\alpha_f = 0$. Le calcul donne alors : $v_f \simeq 24{,}8\,km/s$ et $\Delta v \simeq 12{,}2\,km/s$.

Calcul de la vitesse interstellaire :

$$\frac{1}{2}m{v_f}^2-G\frac{mM_S}{D_{JS}}=\frac{1}{2}m{v_\infty}^2$$

$$v_\infty=\sqrt{{v_f}^2-\frac{2GM_S}{D_{JS}}}\simeq 16{,}8\,km/s\simeq 60400\,km/h.$$

Au lieu de 50 000 km/h pour *Voyager 1* (si elle n'avait pas ensuite profité de Saturne).

• Ellipse : $\frac{1}{2}m{v_i}^2-G\frac{mM_S}{D_{JS}}=-G\frac{mM_S}{2a}$

$$\frac{1}{2a}=\frac{1}{D_{JS}}-\frac{{v_i}^2}{2GM_S} \quad \text{d'où} \quad a\simeq 763{,}4.10^6\,km\,.$$

Vitesse sur l'ellipse au niveau de la Terre :

$$v=\sqrt{2GM_S\left(\frac{1}{D_{TS}}-\frac{1}{2a}\right)}\simeq 40{,}049\,km/s$$

Pour le demi-petit axe : $b=\sqrt{pa}$

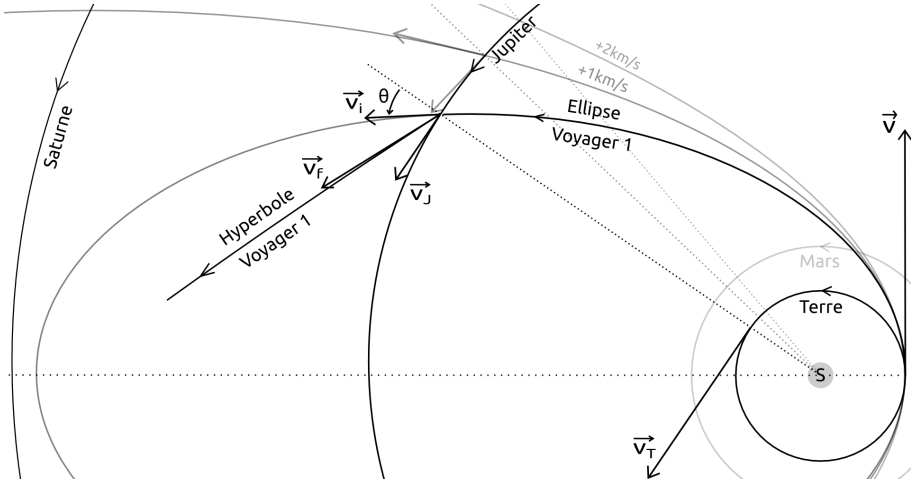
$$p=\frac{{D_{ST}}^2v^2}{GM_s} \quad \text{d'où} \quad b\simeq 454.10^6\,km.$$

Pour l'angle : $cste=L/m=D_{SJ}v_i\sin\theta=D_{ST}v$

$$\sin\theta=\frac{D_{ST}v}{D_{SJ}v_i} \quad \text{et} \quad \theta\simeq 36{,}5\,°.$$

Au niveau de la Terre : $v_T\simeq 30\,km/s$ d'où $\Delta v\simeq 10\,km/s$, augmentation de vitesse nécessaire pour sortir de l'orbite circulaire terrestre. Énergie cinétique fournie par la fusée Titan.

Pour augmenter l'effet de fronde, on peut penser diminuer l'angle θ. D'où une vitesse imprimée par la fusée plus grande pour rejoindre une ellipse plus large (cas en gris).



Par contre, la vitesse à l'approche de Jupiter étant plus élevée, l'angle α_i va augmenter. Par exemple, si, avec une plus grande quantité de propergol, nous augmentons le Δv initial d'1 km/s, nous gagnons 4,2 km/s en vitesse interstellaire. La démarche semble validée, il est bien plus intéressant d'utiliser le propergol au niveau de la Terre qu'après (effet Oberth). Nous résumons page suivante l'ensemble des résultats. Nous considérons le cas optimal où $\alpha_f = 0\,°$.

En augmentant encore la vitesse initiale au départ de l'orbite terrestre, la trajectoire n'est plus elliptique et devient hyperbolique. Dans le même temps, le paramètre d'impact diminue et il faut prêter attention de ne pas entrer en collision avec Jupiter : $r_{min} > R_J$. Le Δv est ainsi limité à 4,8km/s : la sonde va déjà bien plus vite que les sondes *Voyager*.

+ km /s	a (10^6 km)	b (10^6 km)	r_{min} (R_J)	θ (°)	v_{SJ} (km /s)	α_i (°)	v_f (km /s)	Δv (km /s)	v_{inter} (10^3 m/s)	(10^3 km /h)
0	763	454	2,3	36,5	11,4	62,4	23,5	10,9	15,9	57
1	1424	636	1,8	29,8	14,4	69,2	27,2	11,7	20,1	72
2	16647	1942	1,5	26,0	16,9	73,1	29,7	11,7	23,4	84
3	hyp.	hyp.	1,3	23,6	19,1	75,7	31,9	11,7	26,2	94
4	hyp.	hyp.	1,12	21,8	21,2	77,6	34,0	11,7	28,6	103
4,8	hyp.	hyp.	1,01	20,7	22,7	78,8	35,5	11,7	30,4	110
5	hyp.	hyp.	0,99	<choc	x	x	x	x	x	x

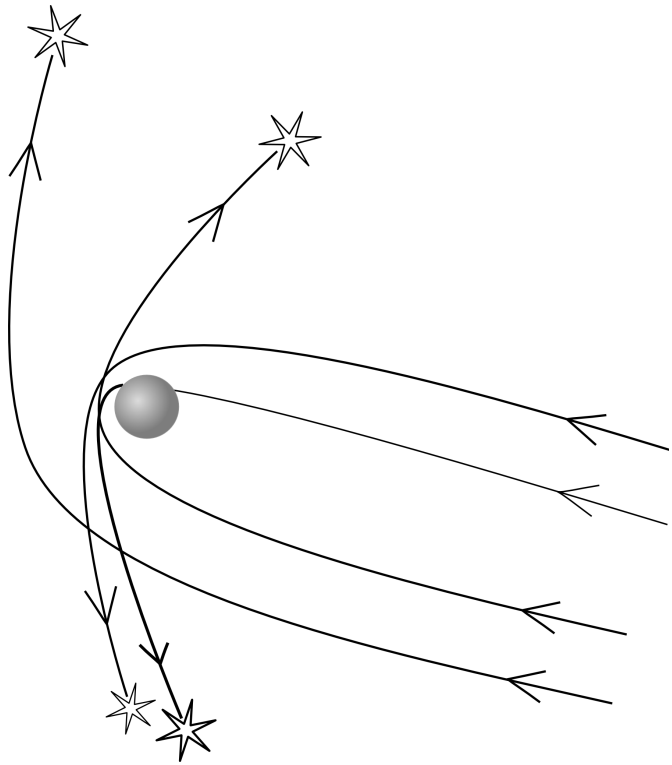
• Mars : La planète a une vitesse orbitale de 24 km/s et le Δv de fronde pourrait en apparence atteindre un faramineux 48 km/s. Par contre, la masse de Mars est faible comparée aux planètes géantes, et la masse de la planète n'étant pas concentrée en un point, on est limité par la distance minimale d'approche R_M. Le Δv_{fronde} vaut dans les meilleures conditions un petit 0,6 km/s.

• Modélisation *Voyager 1* : La feuille de calcul nous donne une bonne correspondance avec les valeurs historiques. Nos hypothèses simplificatrices sont ainsi validées : mouvements héliocentriques des planètes circulaires, orbites coplanaires, orbite d'Hohmann (énergie minimale à fournir).
Fichier : www.voyagepourproxima.fr/docs/FrondesVoyager1.ods

• Projet *Voyager 3* : Nous avons enchaîné les 4 frondes successives de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. En optimisant les distances d'approche, avec un surplus de 4,8 km/s au niveau de la Terre,

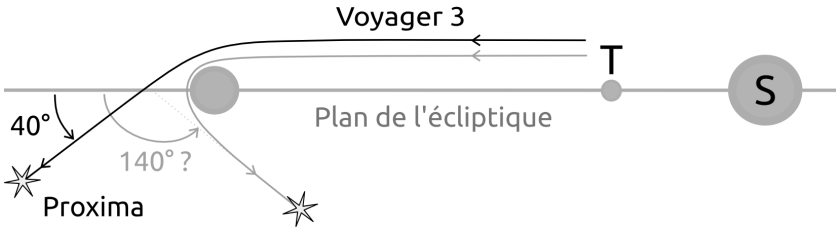
nous atteignons les 140 000km/h. Plus du double de la vitesse des sondes *Voyager* historiques.
Fichier : .../docs/FrondesVoyager3.ods

• Une solution simple et qui ne demande pas de carburant supplémentaire : la dernière fronde est utilisée pour dévier la trajectoire. Par une infime correction, juste après, l'avant-dernière fronde, on peut librement choisir son futur paramètre d'impact, tout autant en valeur qu'en direction. On pourrait ainsi cibler une étoile hors du plan de l'écliptique :



Une limitation tout de même : la distance minimale d'approche. Pour la même distance d'approche,

plus la sonde va vite, plus la déviation est faible. A contrario, la déviation augmente avec la masse de la planète et sa densité.
Pour atteindre Proxima la déviation doit être entre 40° et 140° suivant la position sur l'écliptique au moment de la sortie :



Au niveau de Neptune la vitesse de la sonde est justement élevée, néanmoins Neptune est plus massif et dense qu'Uranus. Regardons sur notre tableur ce que ça donne comme valeur numérique : nous obtenons une déviation d'environ 20°. Ce n'est pas suffisant pour se diriger vers Proxima. Nous donnons une liste non exhaustive d'options :

- *Pourrions-nous obtenir d'autres frondes pour augmenter cette déviation ?*

- Les satellites de Neptune ? Par exemple, Triton, le plus massif et dense, ne donnerait qu'un dixième de degré de déviation supplémentaire. De même pour Pluton, ou les astéroïdes de la ceinture de Kuiper (située après Neptune entre 30 et 55 ua). Les masses de tous ces astres sont trop faibles. À moins d'enchaîner des dizaines de petites frondes ?

- Une étude de 2019 fait l'hypothèse de l'existence de trous noirs primordiaux transneptuniens à 300 ua (voir exercice p329). Ces petits trous noirs de 5 masses terrestres donneraient une déviation largement suffisante, jusqu'à 145°.

- L'hypothétique planète 9 ? Pour expliquer certaines anomalies de trajectoires des planètes, il existe l'hypothèse d'une planète de cinq masses joviennes à 8000 ua. La déviation pourrait atteindre 115°.

- *Devons-nous changer le schéma global des frondes et d'utilisation des ergols ?*

- Pour obtenir, au niveau de Neptune, une déviation supérieure, nous pouvons retirer l'impulsion de 4,8 km/s au niveau de la Terre. La sonde arrive plus lentement et nous obtenons alors une déviation de 30°. C'est mieux mais encore insuffisant.

- Nous pouvons limiter les frondes au couple Jupiter-Saturne. Jupiter pour l'augmentation de vitesse et Saturne pour la déviation. Pour Proxima, il faut ensuite utiliser des propergols pour atteindre les 137 000 km/h. La masse de l'ensemble devient plus importante.

Page 328, treize étoiles proches sont représentées avec leurs caractéristiques.

• Nous allons étudier la possibilité d'un ralentissement gravitationnel de la sonde *Voyager 3* à l'aide des quatre composantes actuellement connues :

L'étoile Alpha Centauri A : M_A=1,1M_S, R_A=1,23 R_S.
L'étoile Alpha Centauri B : M_B=0,91M_S, R_B=0,87 R_S.
Distance entre les deux étoiles : D_{AB}=23 ua.
L'étoile Proxima Centauri : M_C=0,123M_S, R_C=0,141 R_S.
Distance entre Proxima et AB : $D_{P\text{-}AB} \simeq$13 000 ua.
La planète Proxima Cent. b : $M_{Pb} \simeq$1,27M_T, $R_{Pb} \simeq$1,08 R_T.
Distance : $D_{P\text{-}Pb} \simeq$0,0485 ua.

Finalement, nous avons deux sous-systèmes assez éloignés : le couple A-B et le couple étoile-planète. Imaginons que la sonde fasse des allers-retours entre ses deux couples pour pas-à-pas ralentir et finalement orbiter autour de l'un des deux.

→ A-B : Considérons, tout d'abord, les deux composantes stellaires Alpha Centauri A et B. Celles-ci ont des masses similaires à notre Soleil. Pour simplifier, nous pouvons modéliser par un système constitué de deux étoiles en mouvements circulaires. Les deux composantes tournent autour de leur barycentre G milieu du segment [AB].
Loi de Kepler pour la particule fictive M (formules page 98) :

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{\alpha}{4\pi^2\mu} \quad \text{avec} \quad \alpha=GM_AM_B$$

De plus $\mu=\dfrac{M_AM_B}{M_A+M_B}$ d'où $\dfrac{R^3}{T^2}=\dfrac{G(M_A+M_B)}{4\pi^2}$

Comme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GM}$ et $R=GM=D_{AB}$,

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2 {D_{AB}}^3}{G(M_A+M_B)}} \quad \text{et} \quad v=\frac{2\pi R}{T}=\sqrt{\frac{G(M_A+M_B)}{D_{AB}}}$$

v est la vitesse de la particule fictive.

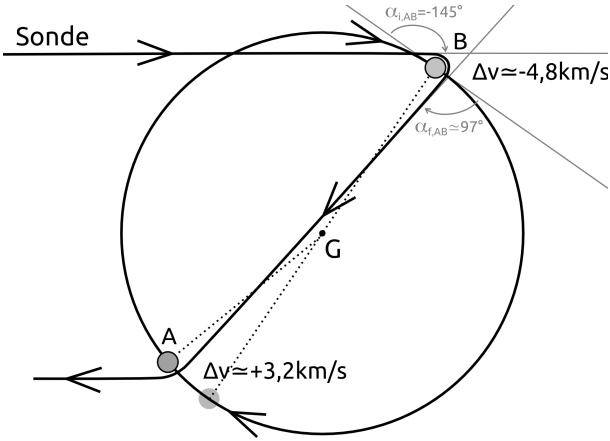
Déterminons v_A et v_B :

$$\overrightarrow{GA}=-\frac{M_B}{M_A+M_B}\overrightarrow{GM} \quad \text{et} \quad v_A=\frac{M_B}{M_A+M_B}v$$

AN : $T\simeq 78\,ans$, $v\simeq 8{,}82\,km/s$,

$$v_A\simeq 3{,}99\,km/s \quad \text{et} \quad v_B\simeq 4{,}82\,m/s.$$

Pour un demi-tour, on doit ralentir avec une composante et accélérer avec l'autre, néanmoins, on peut s'arranger pour que la décélération l'emporte :



Demi-tour par effet de fronde en utilisant un système binaire. Avec une seule étoile, on ne peut pas faire un demi-tour parfait, il manquera toujours quelques degrés. Pour former un couple, on peut aussi utiliser une géante gazeuse. Ici, le système Alpha Centauri A / Alpha Centauri B pour Voyager 3 *avec une vitesse initiale de 140 000 km/h.*

→ P-Pb : Déterminons la vitesse de Proxima dans le référentiel de AB. L'étoile Proxima est éloignée du système AB et a une masse faible par rapport à ce système. Nous pouvons donc considérer le système stellaire AB ponctuel et fixe en G=A=B. Les formules sont les mêmes que précédemment en remplaçant D_{AB} par $D_{P\text{-}AB}$:

AN : $T_P \simeq 1$ million d'années, $v_{P/AB} \simeq 0{,}37\, km/s$.

Période et vitesse de la planète Proxima b dans le référentiel de Proxima (cette fois G=P) :

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 {D_{P-b}}^3}{G M_P}} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt{\frac{G M_P}{D_{P-b}}}$$

AN : $T_b \simeq 11\ jours$, $v_{b/P} \simeq 47{,}5\, km/s$.

Nous pouvons considérer l'étoile comme fixe. Ici, le demi-tour n'est pas possible, car la planète est trop peu massive et la déviation qu'elle donne à la sonde est bien trop faible pour compléter le demi-tour entamé par l'étoile.

→ Conclusion : Avec les composantes connues, l'effet de fronde ne peut freiner suffisamment la sonde. Mais, il y a très probablement de nombreuses composantes joviennes qui seront découvertes par la suite et qui permettront de mettre la sonde en orbite en utilisant peu de propergols.

Nous pouvons élargir notre regard sur l'effet de fronde en renversant le sens du temps. Par exemple, pour le train, en inversant la flèche du temps, la balle arrive à 130 km/h sur un train qui s'éloigne en marche arrière à 50 km/h et la balle revient dans la main de l'enfant à 30km/h. C'est une expérience réalisable. C'est pourquoi l'effet de fronde peut autant accélérer que ralentir. Si nous rembobinons le film des quatre frondes successives de *Voyager 3*, celle-ci arrive du milieu interstellaire pour ralentir avec Neptune, Uranus, Saturne, Jupiter, et finalement décélérer de 4,8 km/s aux propergols pour se mettre en orbite autour de la Terre. Il y a de bonnes chances, pour qu'arrivée au système stellaire distant, la sonde puisse procéder de manière analogue.

4. Simulations numériques des frondes

Énoncé p313.

1 -a- *Lois de Kepler :*

$$p = \frac{r_{min}^2 v_{max}^2}{G M_S} \simeq 149\,507\,901\,890\,m$$

$$e = \frac{p}{r_{min}} - 1 \simeq 0{,}016382$$

$$r_{max} = \frac{p}{1-e} - 1 \simeq 151\,998\,002\,652\,m$$

$$v_{min} = \frac{r_{min}}{r_{max}} v_{max} \simeq 29310{,}644\,m/s$$

$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} \simeq 149\,548\,038\,326\,m$$

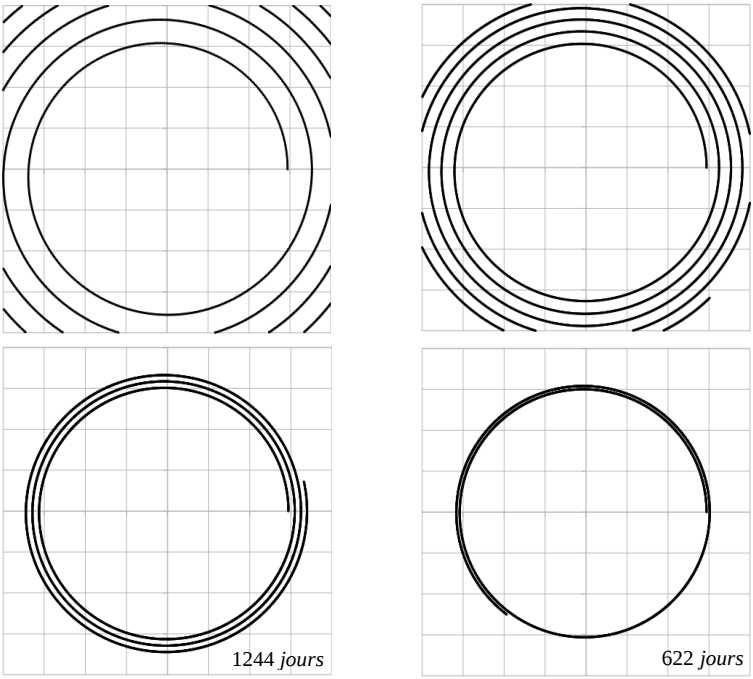
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{G M_S}} a^{3/2} \simeq 365{,}011\ jours$$

Remarque : ces valeurs ne sont pas pleinement cohérentes avec d'autres connues (T=365,256 jrs, r_{max}=152 097 701 km et v_{min}=29 291 m/s) mais nous les prendrons comme références pour tester nos méthodes numériques.

1 -b- *Terre-Soleil* : Nous prenons, comme indicateur de l'erreur globale, la distance au Soleil après une révolution. Les lois de la physique impose de revenir au même point. Quand la Terre à fait une rotation de 360° nous obtenons le pourcentage d'erreur globale $\%\, e_r = \frac{r_{\text{sim}} - r_{théo}}{r_{théo}}$ ($r_{théo} \simeq 1{,}47.10^{11}$m) :

Pas	$r=\sqrt{x^2+y^2}$	$\%e_r$ / tour	ΔE / kg / an
h=1 jour	$1{,}768.10^{11}$m	20,2 %	+68 MJ
h/2	$1{,}624.10^{11}$m	10,4 %	+39 MJ
h/4	$1{,}549.10^{11}$m	5,3 %	+22 MJ
h/8	$1{,}510.10^{11}$m	2,7 %	+11 MJ

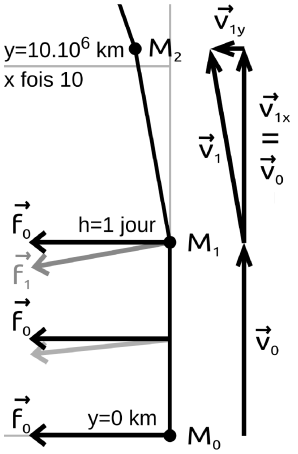
L'allure des trajectoires pour h, h/2, h/4 et h/8 :



Pour répondre à la première question, il est clair que, pour h=1 jour, la simulation n'est absolument pas satisfaisante. Nous devrions obtenir une trajectoire fermée qui revient exactement sur ses pas. Tout se passe comme si l'énergie mécanique du système augmentait au lieu de rester constante. Néanmoins l'erreur diminue linéairement avec le pas.

Notons *T* la durée de l'expérience numérique, ici la période de révolution, et *n* le nombre de pas, nous avons alors : *h=T/n*. *n* correspond au *travail numérique* nécessaire. L'*erreur globale* évolue en *1/n*. Cette variation linéaire est caractéristique des méthodes d'ordre 1.

Pour h=1/8 jour, l'erreur reste conséquente : r_{max}=154,3.10^{6}km, v_{min}=29083m/s et l'année vaut environ 372 jours...



Au premier pas, nous constatons que la vitesse de la Terre augmente, ce qui est physiquement impossible puisque l'on part du périhélie. D'après la loi des aires, la vitesse doit diminuer sur chaque intervalle de temps jusqu'à l'aphélie. Or, sur le premier pas, la vitesse orthoradiale n'a pas été modifiée. C'est la force qui modifie le vecteur vitesse et nous avons considéré cette force constante et égale à celle en début d'intervalle. En fait sur un pas, la position, tout comme la force, varient continûment.

Nous proposons une modification de la méthode, nous prenons le début d'intervalle pour estimer les composantes de la vitesse et la fin d'intervalle pour les positions. On pourrait ainsi globalement compenser nos erreurs, car on utilise, en boucle d'un rang à l'autre, les positions pour calculer les vitesses et les vitesses pour calculer les positions :

$$v_{x,i,n+1} = v_{x,i,n} + F_{x,i}(x_{j,n}, y_{j,n})\,\Delta t \quad x_{i,n+1} = x_{i,n} + v_{x,i,n+1}\,\Delta t$$

Déjà pour h=1 jour, l'erreur devient bien plus faible : r_{max}=152,4.10^6km, v_{min}=29240m/s et l'année vaut environ 366 jours (anomalies : r_{max} et v_{min} ne se produisent pas après un demi-tour, ni au même moment).
Pour h=1/8 jour : r_{max}=152,004.10^6km, v_{min}=29309m/s et l'année vaut environ 365,0 jours.

Méthode d'Euler améliorée			
Pas	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\%e_r$ / tour	ΔE / kg / an
h=1jr	1,47097506026.10^{11}m	-0,00039 %	-149 J
h/2	1,47098004533.10^{11}m	-0,000047 %	-28 J
h/4	1,47098066041.10^{11}m	-0,0000054 %	-8,3 J
h/8	1,47098073350.10^{11}m	-0,00000044 %	-3,4 J

La méthode améliorée est impressionnante, pour une modification infime de la méthode de calcul, nous avons des résultats, certes encore insuffisants, mais bien meilleur pour un travail numérique huit fois plus faible ! L'erreur n'évolue plus linéairement, nous nous rapprochons de ce que l'on appelle la méthode du point milieu où l'erreur diminue au carré du travail numérique.

En conclusion, la méthode de calcul utilisée à chaque pas apparaît comme un élément clef, plus important que la puissance informatique brute. Nous allons donc introduire une méthode numérique d'ordre supérieur.

Fichier : www.voyagepourproxima.fr/docs/Terre-Soleil-Euler.ods

2 -a- ***RK4*** **:**

$$\frac{dx}{dt}=A(x,y,v_x,v_y)=v_x, \qquad \frac{dy}{dt}=B(x,y,v_x,v_y)=v_y$$

$$\frac{dv_x}{dt}=C(x,y,v_x,v_y)=-GM\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dv_y}{dt}=D(x,y,v_x,v_y)=-GM\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$A_1=A(x_n,y_n,v_{xn},v_{yn}) \qquad B_1=B(x_n,y_n,v_{xn},v_{yn})$$

$$C_1=C(x_n,y_n,v_{xn},v_{yn}) \qquad D_1=D(x_n,y_n,v_{xn},v_{yn})$$

$$A_2=A\left(x_n+\frac{h}{2}A_1,y_n+\frac{h}{2}B_1,v_{xn}+\frac{h}{2}C_1,v_{yn}+\frac{h}{2}D_1\right)$$

... ...

$$A_3=A\left(x_n+\frac{h}{2}A_2,y_n+\frac{h}{2}B_2,v_{xn}+\frac{h}{2}C_2,v_{yn}+\frac{h}{2}D_2\right)$$

... ...

... ...

$$D_4=D(x_n+hA_3,y_n+hB_3,v_{xn}+hC_3,v_{yn}+hD_3)$$

$$x_{n+1}=x_n+\frac{h}{6}(A_1+2A_2+2A_3+A_4)$$

... ...

$$v_{yn+1}=v_{yn}+\frac{h}{6}(D_1+2D_2+2D_3+D_4)$$

b- Pour h=1 jour, h/2 et h/8 : r_{max}=151,998.10^{6}km, v_{min}=29310,6m/s et l'année vaut 365,01 jours. En accord avec les données entrées.

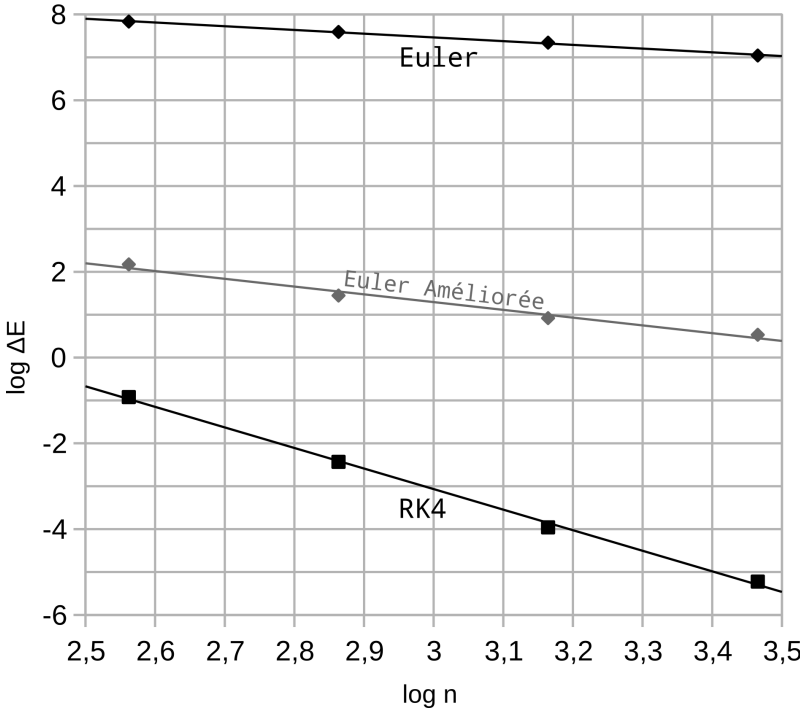
Méthode Runge-Kutta 4			
Pas	$r=\sqrt{x^2+y^2}$	$\%e_r$ / tour	ΔE / kg / an
h=1jr	$1{,}4709807807.10^{11}$m	27.10^{-9}	-120 mJ
h/2	$1{,}4709807603.10^{11}$m	14.10^{-9}	-3,7 mJ
h/4	$1{,}4709807499.10^{11}$m	6.10^{-9}	-0,11 mJ
h/8	$1{,}4709807447.10^{11}$m	3.10^{-9}	-0,006 mJ

Cette méthode supplante largement les précédentes.

Fichier : .../docs/Terre-Soleil-RK4.ods

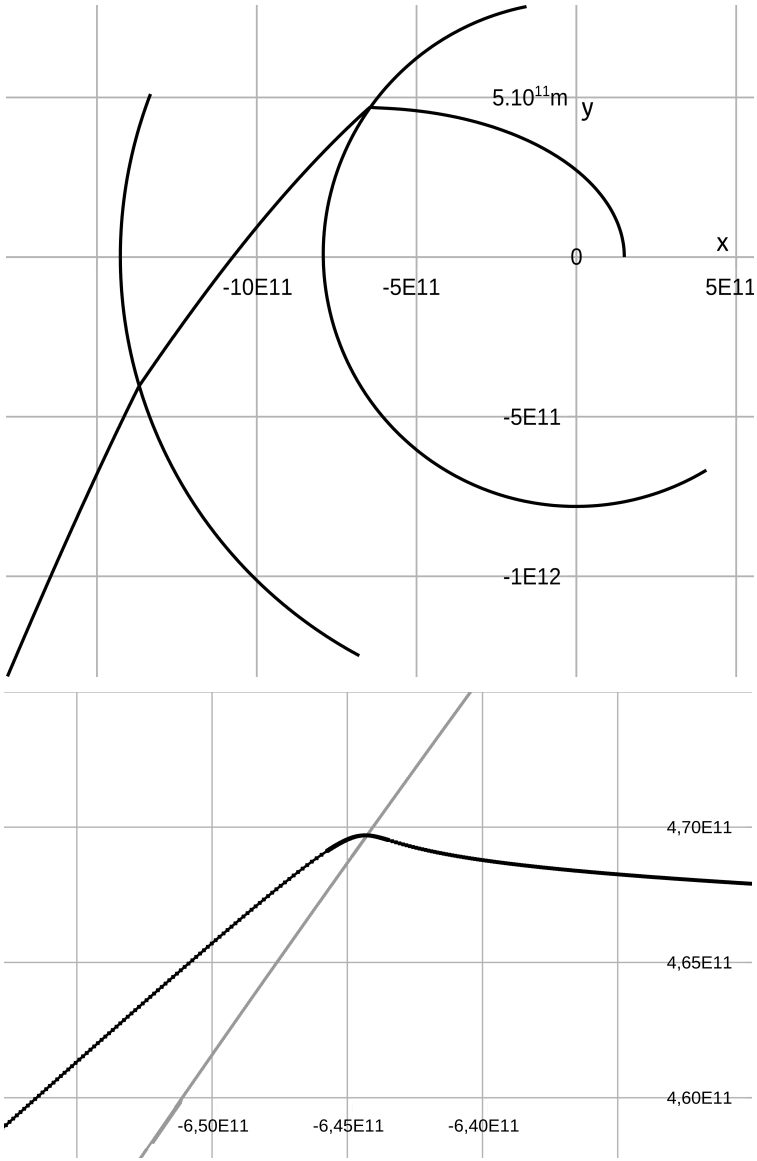
Nous nous sommes intéressé à la variation de distance sur un tour et à la variation de l'énergie mécanique sur un an. Pour une étude mathématique de l'erreur, on effectue une expérience de durée fixe *T*, puis on augmente le travail numérique *n* sur cet intervalle [0, T]. Et pour calculer l'erreur globale, il faut comparer la valeur numérique à celle théorique en *t=T*. Or, nous n'avons pas déterminé l'expression de *r(t)*, mais seulement $r(\theta)$. Pour l'énergie mécanique, c'est bien plus simple de comparer à la valeur théorique, car la théorie impose une énergie constante. Nous comparons donc la valeur initiale de l'énergie à celle à un *T* quelconque. Nous avons ici choisi *T= 365 jours* sur le graphique qui suit.

Comparaison des méthodes pas à pas :



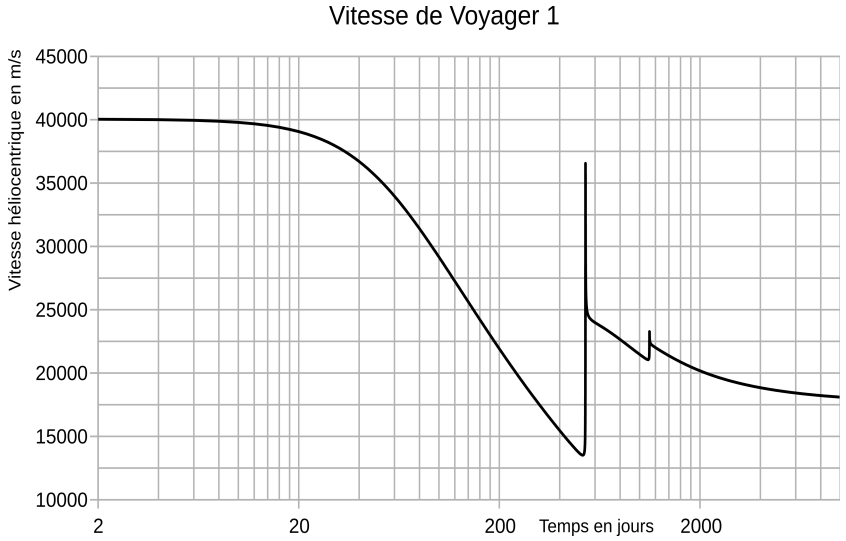
Nous traçons le logarithme décimal de l'erreur en fonction du logarithme décimal du travail numérique. À gauche, les valeurs pour un pas h d'un jour et une durée de 365 jours, soit environ un an (n=365). Ensuite les points pour h/2, h/4 et h/8 (n=730, 1095 puis 1460) toujours sur un an. Plus le travail numérique n augmente, plus l'erreur est faible, et d'autant plus rapidement que la méthode est d'ordre supérieur. Pour la méthode d'Euler l'erreur diminue linéairement avec le pas, ici, sur une décade, l'erreur diminue bien d'un facteur 10. Nous constatons que la méthode d'Euler améliorée est bien une méthode d'ordre 2, sur une décade, l'erreur est divisée par 100. Pour Runge-Kutta d'ordre 4 nous avons un facteur 10^4.

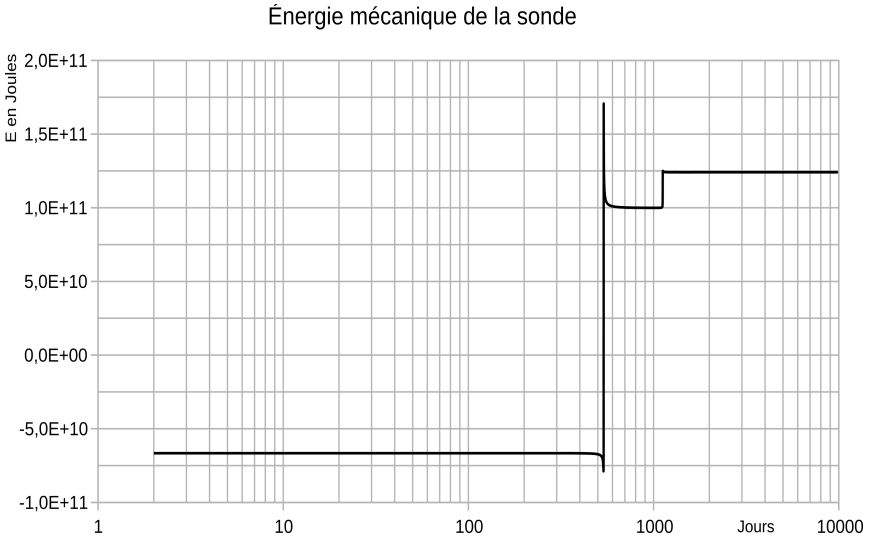
3 - *Voyager 1* :

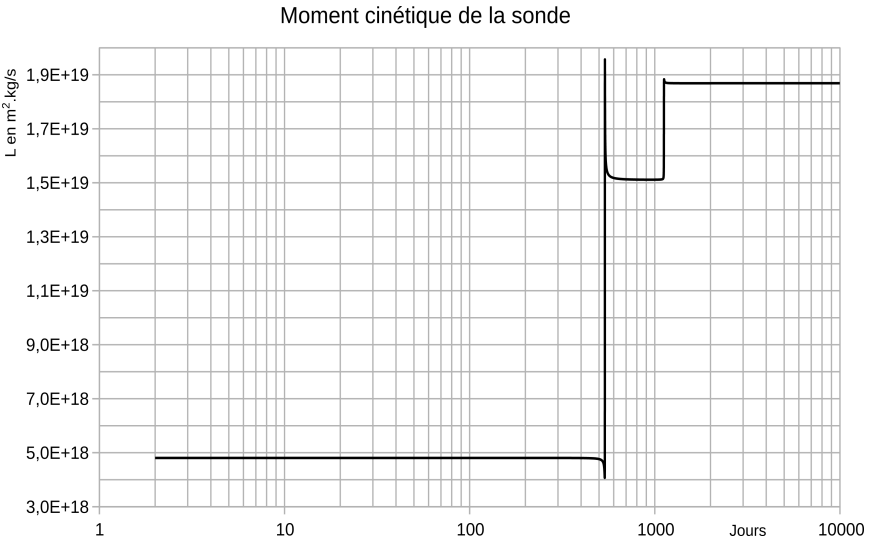


La trajectoire de la sonde Voyager 1 vue dans le référentiel héliocentrique. En haut, le départ au niveau de la Terre, suivi des frondes au niveau de Jupiter, puis

Saturne, pour rejoindre ensuite le milieu interstellaire. En bas, l'effet de fronde apparaît clairement au niveau de Jupiter. Contrairement à la trajectoire dans le référentiel galiléen centrée sur Jupiter, la trajectoire héliocentrique n'est pas hyperbolique.







Nous retrouvons les caractéristiques du mouvement de *Voyager 1* en accord avec nos résultats avec les formules de Kepler et les données historiques fournies par la NASA. Pour Jupiter, nous avons les valeurs de vitesses en début de fronde, au pic, et en sortie de fronde qui correspondent.

Entre deux frondes, il y a bien conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique par rapport au Soleil, les valeurs sont en adéquation. Entre deux planètes, la sonde peut être considérée comme isolée, d'où les deux grandeurs conservées. Par contre, au moment des déviations, il y a transfert d'énergie entre la sonde et la planète. Par exemple, la sonde reçoit de l'énergie cinétique de Jupiter, ainsi Jupiter ralentit, mais, vu la masse de la planète par rapport à la sonde, c'est indétectable. Au moment de l'interaction entre la sonde et la planète l'énergie mécanique et le moment cinétique de

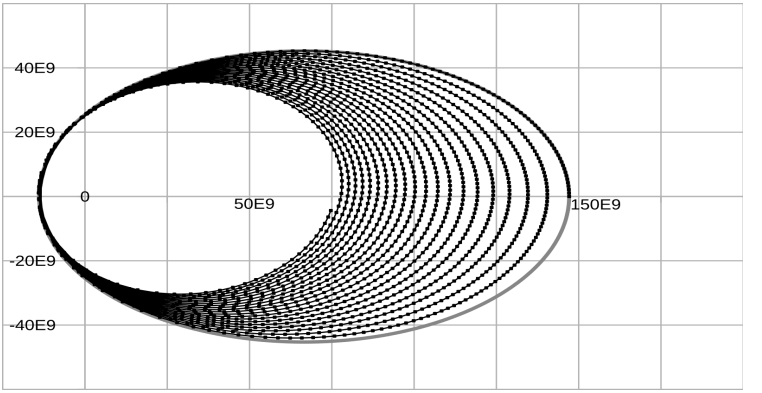
l'ensemble des deux corps sont conservés dans le référentiel héliocentrique.
Pour parfaitement enchaîner les deux frondes, sans correction de trajectoire, il faut un ajustement très fin des conditions initiales.
Concernant le pas, il serait très coûteux, en temps de calcul et quantité de données à mémoriser, si on le maintenait constant. Nous avons choisi un pas de deux jours dans le milieu interplanétaire, de deux heures à l'approche, et d'une minute au niveau des frondes. Le pas s'adapte automatiquement en fonction de la distance à la planète et de la vitesse de la sonde. C'est une adaptation opérée "à la main", la méthode n'est pas générale mais adaptée à ce problème particulier. Il existe des méthodes pas à pas adaptatives. La plus classique consiste à estimer l'erreur locale à chaque pas. Aussi, nous pourrions adapter le pas en fonction du rayon de courbure et de la vitesse de la sonde. En effet, toute trajectoire est localement, au voisinage d'un point, contenu dans un plan, appelé plan osculateur. Et la particule se déplace localement selon un cercle osculateur de rayon R, appelé rayon de courbure. Nous pourrions considérer, qu'à chaque pas, pour bien suivre la courbure, la particule ne devrait pas parcourir une portion trop grande du cercle. Une méthode adaptative pourrait imposer un pas angulaire Δθ plutôt qu'un pas temporel *h* :

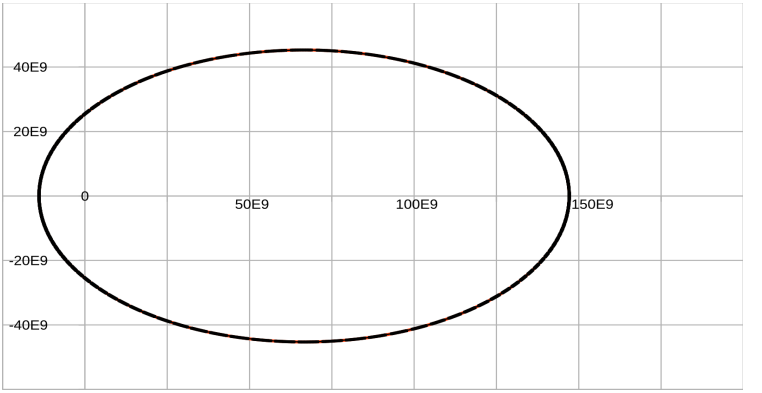
$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{u}_t+\frac{v^2}{R}\vec{u}_n \Rightarrow R=\frac{v^2}{\sqrt{a^2-\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}} \text{ avec } \frac{dv}{dt}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v}$$

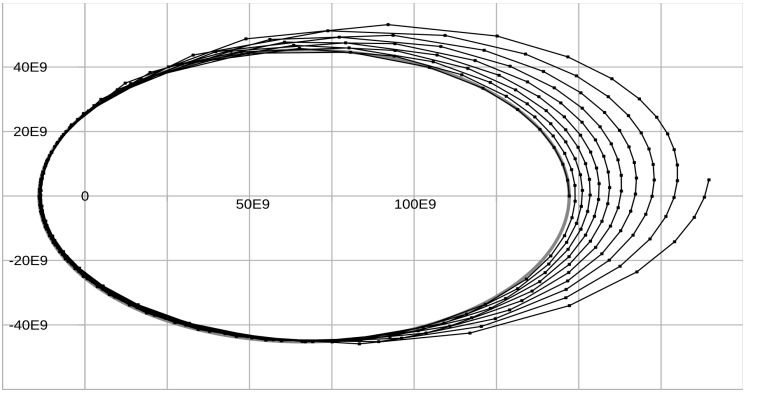
et finalement $h = \frac{R\Delta\theta}{v}$.

Nous n'avons pas mis en place cette méthode, par contre, à l'aide de ces formules, nous avons calculé Δθ à chaque pas pour contrôler un bon suivi et nous avons des angles au maximum de 1,5 degré. Tout d'abord, cette méthode adaptative ne conviendrait pas pour un mouvement 3D où le plan osculateur peut changer en permanence (comme pour le mouvement hélicoïdal d'une particule chargée dans un champ magnétique), de plus, le pas de n à $n+1$ est évalué à partir de la situation à t_n. Mais beaucoup de choses inattendues peuvent se passer entre t_n et t_{n+1}. Par exemple, pendant un pas de deux jours, une planète ou un astéroïde peut surgir de "nul part". Nous ne l'avons pas fait, mais comme ici, nous connaissons la position des planètes, nous pourrions anticiper, à chaque pas, le pas suivant. Le calcul serait ainsi allégé.

Comparaison du RK4 à pas constant avec le RK4 à pas variable : Pour notre test de résistance, nous avons repris le système Terre-Soleil avec une vitesse de départ au périgée de seulement 12,5 km/s. Pour l'ensemble des trois expériences numériques $T=1825$ jours $\simeq 5$ ans.
En haut : $h=1$ jour, $n=1825$. Instable.
Au milieu : h variable, $\Delta\theta=3°$, $n=1533$. Stable avec n inférieur.
En bas : h variable, $\Delta\theta=11°$, $n=353$. Instable.


40E9
20E9
0
50E9
150E9
-20E9
-40E9


40E9
20E9
0
50E9
100E9
150E9
-20E9
-40E9


40E9
20E9
0
50E9
100E9
-20E9
-40E9

L'allure du schéma RK4 pour *Voyager 1* avec ses 12 degrés de liberté :

$$\frac{dx_V}{dt}=A(x_V,y_V,v_{xV},v_{yV},x_J,y_J,v_{xJ},v_{yJ},x_S,y_S,v_{xS},v_{yS})=v_{xV}$$

...

$$\frac{dv_{xV}}{dt}=C(ddls)=-GM\frac{x_V}{(x_V^2+y_V^2)^{3/2}}-GM_J\frac{x_V-x_J}{((x_V-x_J)^2+(y_V-y_J)^2)^{3/2}} \quad ...$$

... .

$$A_1=A(x_{Vn},...,v_{ySn}) \quad ... \quad L_1=L(x_{Vn},...,v_{ySn})$$

$$A_2=A(x_{Vn}+\frac{h}{2}A_1,...) \quad ... \quad L_4=L(...,v_{ySn}+hL_3)$$

$$x_{Vn+1}=x_{Vn}+\frac{h}{6}(A_1+2A_2+2A_3+A_4)$$

... ...

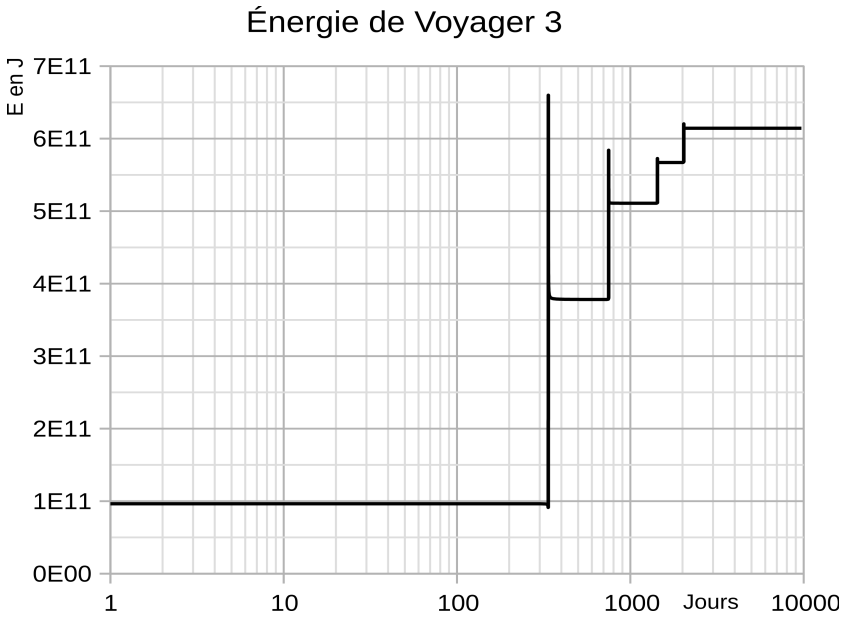
$$v_{ySn+1}=v_{ySn}+\frac{h}{6}(L_1+2L_2+2L_3+L_4)$$

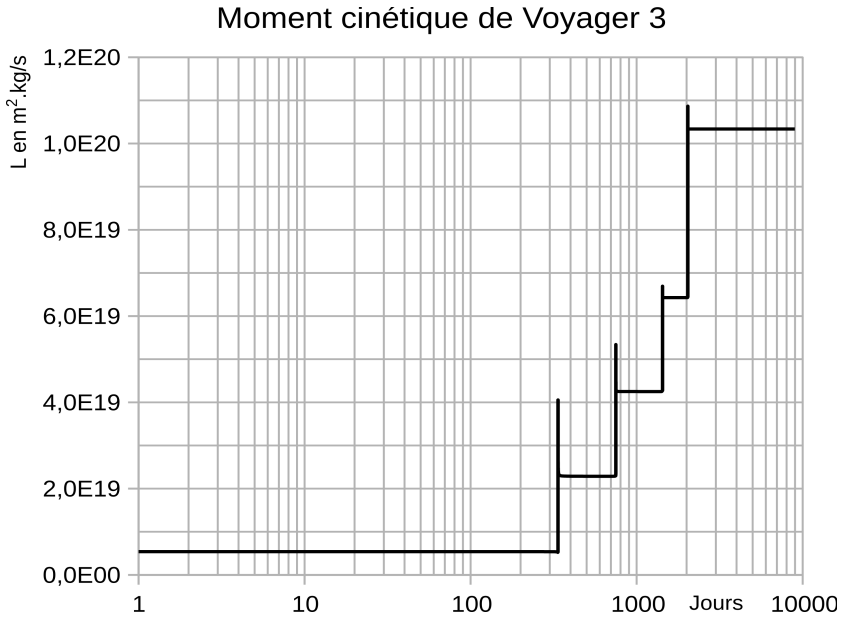
Les fonctions ont été placées dans une macro en langage Basic.

Fichier : Voyager-1-RK4.ods

4 - *Le projet Voyager 3* :

Le parcours de la sonde et le profil de vitesse ont déjà été donnés lors de la conférence page 288. Nous constatons aussi une excellente adéquation avec le fichier FrondesVoyager3.ods Après 27 ans, nous avons une vitesse intersidérale de 39 300 m/s soit 141 000 km/h.


Énergie de Voyager 3
E en J
7E11
6E11
5E11
4E11
3E11
2E11
1E11
0E00
1
10
100
1000
Jours
10000


Moment cinétique de Voyager 3
L en m².kg/s
1,2E20
1,0E20
8,0E19
6,0E19
4,0E19
2,0E19
0,0E00
1
10
100
1000
Jours
10000

Nous avons effectué une correction de trajectoire de 331 m/s au périastre d'Uranus.

5. Calcul des masses de propergols *Énoncé p320.*

1 - Le système {astronaute + clef à molette} est isolé. Il en découle la conservation de la quantité de mouvement dans un référentiel galiléen. Prenons le référentiel barycentrique, initialement l'ensemble est immobile, et, ensuite, chaque partie part en sens opposé. Il faut lancer la clef, le plus fort possible, dans la direction opposée de la station :

$$\vec{0} = m\vec{V} + M\vec{v} \quad \text{et} \quad v = \frac{m}{M}V \simeq 0{,}36\ km/h$$

Par contre l'énergie mécanique ne se conserve pas. Dans ce cas les forces intérieures entre les différentes parties du système interviennent aussi. Le travail des forces intérieure est nul pour un solide où les distances entre les différentes parties restent constantes. L'énergie mécanique décompte les forces macroscopiques potentielles et cinétiques. Ici l'énergie cinétique est initialement nulle et augmente ensuite. Les énergies cinétiques de la clef et de l'astronaute ont des valeurs différentes :

$$E_{c\ clef} = \frac{1}{2}mV^2 \quad \text{et} \quad E_{c\ astro} = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}V^2 = \frac{m}{M}E_{c\ clef}$$

La quantité de mouvement est proportionnelle à la vitesse, alors que l'énergie cinétique varie au carré.

2 - Pour une fusée la masse est éjectée en continu et la masse de la fusée varie au cours du temps.

Néanmoins le principe est le même pour chaque intervalle de temps : $0 = dm\, v_e + m\, dv$

et $\Delta v = \int dv = -\int \frac{dm}{m} v_e = -v_e \int \frac{dm}{m} = v_e \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$.

Nous retrouvons bien la loi de l'astronautique.
Débit d'ergols : $D = dm/dt = -ma/v_e$.
Pour la fusée photonique : $E = pc = mc^2$ d'où $p = mc$, où *m* est la masse de la matière et de l'antimatière qui ce sont annihilées. Finalement nous remplaçons la vitesse d'éjection v_e par *c*. Après calcul et des vitesses non-relativiste :

$$m_M + m_{AM} = m_U \left(e^{\frac{\Delta v}{c}} - 1\right) \simeq m_U \beta = m_U \frac{d_{al}}{T_a}$$

Dans la première somme nous avons les masses de matière et d'antimatière qui s'annihile, et si de plus nous ajoutons le rendement *r=0,1* :

$$m_{AM} \simeq \frac{m_U}{2r} \frac{d_{al}}{T_a} \qquad (m_U : \text{masse utile})$$

Pour 35 000 ans on trouve 460 grammes, mais en fait il en faut deux fois moins car la sonde a déjà acquis la moitié de la vitesse par effet de fronde.
Si la dilatation du temps ne peut être négligée il faut considérer le temps propre car nous sommes dans le référentiel de la fusée. Mais même pour un voyage de 50 ans, le temps peut encore être considéré, dans une bonne approximation, comme absolu.

3 - Le voyage pour Proxima a accélération constante donne, pour une pesanteur artificielle terrestre, une vitesse à mi-parcours de 95 % de *c* et

un γ de 3. Clairement nous ne pouvons faire l'économie de la relativité restreinte. Nous raisonnons dans le référentiel propre et pendant $d\tau$ les vitesses restent classiques. Accélération propre et conservation de l'impulsion :

$$a=\frac{dv}{d\tau}=g, \quad 0=dmc+mg\,d\tau \quad \text{et} \quad D=\frac{dm}{d\tau}=-\frac{mg}{c}.$$

Nous intégrons : $\tau=\int d\tau=-\frac{c}{g}\int\frac{dm}{m}=\frac{c}{g}\ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$.

$$\text{D'où :} \quad m_{AM}=m_U\frac{e^{\frac{g\tau}{c}}-1}{2}$$

L'étude cinématique donne $\tau\simeq 6{,}84$ ans pour l'aller-retour (chapitre du cours sur le mouvement accéléré). Pour un réacteur photonique avec un rendement de 100 % :

$$\text{Aller simple :} \quad m_{AM}\simeq 18\,m_U.$$

$$\text{Aller-retour :} \quad m_{AM}\simeq 666\,m_U.$$

Les quantités d'antimatières sont ici importantes. Pour la même durée de voyage et la même masse utile, un voyage habité à accélération constante demande plus d'énergie qu'un voyage à vitesse constante (comme pour la sonde). Du propergol utilisé au début produit une augmentation de vitesse qui profite sur l'ensemble du voyage, alors qu'utilisé un peu avant le mi-parcours il ne servira quasiment pas, car commencera juste après la phase de décélération. Pour respecter la tolérance du corps humain aux *g*, tout en minimisant la quantité d'ergols utilisée, nous pouvons faire varier l'accélération moyenne du vaisseau :

Voyage à accélération variable

1ère période (prise de vitesse) : accélération moy. 2 *g*.
Activité : 12 heures à 1,2 *g*.
Sommeil / Repos : 12 heures à 2,8 *g*.

2ème période (jusqu'au retournement) : acc. moy. 0,3 *g*.
Activité : 8 heures à 0,9 *g*.
Sommeil / Apesanteur : 16 heures à zéro *g*.

$$\tau=\tau_1+\tau_2 \qquad D=D_1+D_2 \qquad D_1=\frac{c^2}{g_1}\left(ch\left(\frac{g_1\tau_1}{c}\right)-1\right)$$

$$\beta_{1max}=\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{g_1 D_1}{c^2}\right)^2}} \qquad \tau_2=\frac{c}{2\,g_2}\ln\left(\frac{1+\beta_{max}}{1-\beta_{max}}\,\frac{1-\beta_{1max}}{1+\beta_{1max}}\right)$$

$$D_2=\frac{c^2}{g_2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{max}^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{1max}^2}}\right) \qquad \frac{m_i}{m_{1/2}}=e^{\frac{g_1\tau_1+g_2\tau_2}{c}}$$

Si τ_1=0,5 an, alors D_1=0,3 al et $\beta_{1\,max}$=78%*c*. Avec β_{max}=88 %, D=2 al et τ=1,6 an. Une nette économie de carburant :

Aller simple : $m_{AM}\simeq 8\,m_U$, AR : $m_{AM}\simeq 134\,m_U$.

L'aller pour Proxima dure 3,2 ans pour les astronautes. La vitesse maximale est bien plus faible : cela permet de diminuer la taille du bouclier avant de la fusée qui protège des chocs avec les particules du milieu interstellaire. Ce milieu est très dilué, 10^{-21} kg/m^3, mais aux vitesses relativistes l'apport énergétique des chocs est à considérer (Exo *Bouclier de protection* du livre de Semay).

4 - Le projet *Voyager 3* : Nous allons considérer deux cas, celui du survol, et celui de la mise en orbite.
Survol : il faut augmenter la vitesse de la sonde de 4,8 km/s. Prenons 5 km/s pour prévoir aussi les corrections de trajectoire :

$$\Delta v = v_e \ln\left(\frac{m_S + m_e}{m_S}\right) \text{ et } m_e = m_S\left(e^{\frac{\Delta v}{v_e}} - 1\right)$$

AN : m_S=800 kg, v_e=4 km/s et m_{ergols}=2000 kg.

Satellisation : si la situation est symétrique, nous pouvons doubler avec Δv=10 km/s, la moitié pour accélérer et l'autre pour ralentir.

Nous résumons les valeurs dans un tableau :

Δv	m_{sonde}	m_{ergols}	m_{totale}	Fusées
5 km/s	0,8 t	2 t	3 t	Ariane 6, Falcon 9, etc.
10 km/s	0,8 t	9 t	10 t	Ariane 6, Falcon Heavy, etc.
20 km/s	0,8 t	119 t	120 t	Saturn V, StarShip.
10 km/s	12 t	134 t	150 t	StarShip.

6. Alignements des planètes

Énoncé p321

1 - $\begin{cases}\theta_A(t) = \omega_A t + \theta_A(0) \\ \theta_B(t) = \omega_B t + \theta_B(0)\end{cases}$, origine des temps sur un alignement $\theta_A(0) = \theta_B(0)$, alignement suivant $t = T_{AB}$:

$$\theta_A(t) - \theta_B(t) = 2\pi = (\omega_A - \omega_B) T_{AB} = \left(\frac{2\pi}{T_A} - \frac{2\pi}{T_B}\right) T_{AB}$$

2 - $T_{TJ} = T_T T_J / (T_J - T_T) \simeq 1{,}092\, ans \simeq 1\, an\, 1\, mois$.

Après un tour de la Terre, Jupiter aura tourné d'un douzième de tour.

Prochains alignements Soleil-Terre-Jupiter :

20/08/2021	27/09/2022	03/11/2023	07/12/2024	10/01/2026
10/02/2027	12/03/2028	12/04/2029	13/05/2030	15/06/2031

19/07/2032	25/08/2033	02/10/2034	08/11/2035	12/12/2036
14/01/2038	15/02/2039	16/03/2040	16/04/2041	17/05/2042
20/06/2043	24/07/2044	30/08/2045	07/10/2046	12/11/2047

3 - $T_{JS} = T_J T_S / (T_S - T_J) \simeq 19{,}86\ ans \simeq 19\ ans\ 10\ mois$

Les deux grandes gazeuses s'alignent tous les 20 ans environ. La rotation de la Terre étant bien plus rapide nous aurons, sur la même période, un alignement correct à quatre astres. Pour une recherche rapide, nous commençons par utiliser un logiciel d'astronomie (*Stellarium* / Situation : Soleil / Grille écliptique), et nous affinons avec *Miriade* :

Alignements Soleil-Terre-Jupiter-Saturne :

Date	18/07/2020	22/03/2040	20/11/2059	05/08/2080
Écart	6°	11°	4°	4°

4 - $T_{UN} \simeq 171{,}47\ ans$ et $T_{UN}/T_{JS} \simeq 8{,}6 \simeq 9.$

Nous pourrions donc avoir un alignement convenable tous les 171 ans. En 2162, la Terre et les quatre géantes sont regroupées sur un angle de 60°. L'alignement précédent était dans les années du lancement des sondes *Voyager 1* et *2*.

7. Mouvement des étoiles

Énoncé p322

1- $v_{t\alpha} = \mu_\alpha d_0 \qquad v_{t\delta} = \mu_\delta d_0 \qquad v_t^2 = v_{t\alpha}^2 + {v_{t\delta}}^2$

$$v_t = \mu d_0 \qquad \mu^2 = {\mu_\alpha}^2 + {\mu_\delta}^2$$

Unités particulières :

$$v_t(km/s) = \frac{10^{-3}}{3600} \times \frac{\pi}{180°} \times \frac{3.10^8}{10^3} \times \mu(mas/an) \times d_0(al)$$

$$v_t(km/s) = 1{,}454.10^{-3}\ \mu(mas/an)\ d_0(al)$$

(mêmes formules selon α et δ)

Vitesse de l'étoile : $v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_t}^2}$

α Cen C : $\mu = 3859\, mas/an$ $\quad v_{t\alpha} = -23{,}33\, km/s$

$v_{t\delta} = 4{,}75\, km/s$ $\quad v_t = 23{,}81\, km/s$ et $v = 32{,}56\, km/s$.

Sur un siècle, nous pouvons considérer le mouvement apparent constant et tout simplement multiplier :

$$\Delta\mu_\alpha \simeq \mu_\alpha \times \Delta t \quad \text{et} \quad \Delta\mu_\delta \simeq \mu_\delta \times \Delta t.$$

α Cen C : $\Delta\mu_\alpha \simeq -0h6'18''$ $\quad \Delta\mu_\delta \simeq 0°1'17''$

$\alpha \simeq 14h23'25''$ et $\delta \simeq -62°39'29''$

2- Nous constatons que les vitesses radiale, tangentielles, et les mouvements propres varient au cours du temps. À l'approche la vitesse radiale est négative, elle s'annule à la distance minimale, et devient positive quand l'étoile s'éloigne. À l'inverse, la vitesse tangentielle est maximale au périhélie.

a- $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{SM}}{dt} = \overrightarrow{cst}$ d'où $\vec{d} = \overrightarrow{SM} = \vec{v}\,t + \overrightarrow{SM_0}$

$d^2 = {d_0}^2 + 2\overrightarrow{SM_0}\cdot\vec{v}\,t + v^2t^2$ et $d(t) = \sqrt{{d_0}^2 + 2\,d_0 v_{r0} t + v^2 t^2}$

b- Périhélie : $\dfrac{d\,d(t)}{dt} = 0$ d'où $t_m = -\dfrac{d_0 v_{r0}}{v^2}$ et $d_m = d_0 \dfrac{v_{t0}}{v}$.

α Cen C : $d_m = 3{,}10\, al$ et $t_m = 26\,660\, ans$.

c- Nous allons passer par les coordonnées cartésiennes pour revenir aux coordonnées sphériques. Pour plus de cohérence de l'ouvrage, nous utilisons le système de coordonnées sphériques usité en physique. Peu de changement, néanmoins les notations sont différentes de celles de l'astronomie, et, la colatitude est préférée à la latitude (exercice page 169) :

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\delta \qquad \varphi=\alpha \qquad \vec{d}_0=\begin{pmatrix} d_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0=d_0\sin\theta_0\cos\varphi_0 \\ y_0=d_0\sin\theta_0\sin\varphi_0 \\ z_0=d_0\cos\theta_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_{r0} \\ v_{\theta 0}=-v_{t\delta 0} \\ v_{\varphi 0}=v_{t\alpha 0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_x=v_{r0}\sin\theta_0\cos\varphi_0+v_{\theta 0}\cos\theta_0\cos\varphi_0-v_{\varphi 0}\sin\varphi_0 \\ v_y=v_{r0}\sin\theta_0\sin\varphi_0+v_{\theta 0}\cos\theta_0\sin\varphi_0+v_{\varphi 0}\cos\varphi_0 \\ v_z=v_{r0}\cos\theta_0-v_{\theta 0}\sin\theta_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}=\begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x=d\sin\theta\cos\varphi \\ y=d\sin\theta\sin\varphi \\ z=d\cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}t+\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \tan\varphi(t)=\dfrac{v_y t+y_0}{v_x t+x_0}=\dfrac{y(t)}{x(t)} \\ \cos\theta(t)=\dfrac{v_z t+z_0}{d(t)}=\dfrac{x(t)}{d(t)} \end{cases}$$

<u>α Cen C</u> : $\theta_0=\dfrac{\pi}{2}-\delta_0=152{,}68°$ $\varphi_0=\alpha_0=217{,}43°$

$$\vec{d}_0=\begin{pmatrix} x_0=-1{,}547\,al \\ y_0=-1{,}184\,al \\ z_0=-3{,}771\,al \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}=\begin{pmatrix} v_x=-9{,}44\,km/s \\ v_y=22{,}15\,km/s \\ v_z=21{,}90\,km/s \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \tan\varphi_m=\dfrac{v_y t_m+y_0}{v_x t_m+x_0}\simeq -0{,}329 \\ \cos\theta_m=\dfrac{v_z t_m+z_0}{d_m}\simeq -0{,}589 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textit{Équatoriales}: \\ \alpha_m\simeq 161°47' \\ \delta_m\simeq -35°59' \end{cases} \qquad \begin{cases} \textit{Écliptiques}: \\ \alpha_m\simeq 180°8' \\ \delta_m\simeq -39°46' \end{cases}$$

Positions des étoiles à l'arrivée du vaisseau

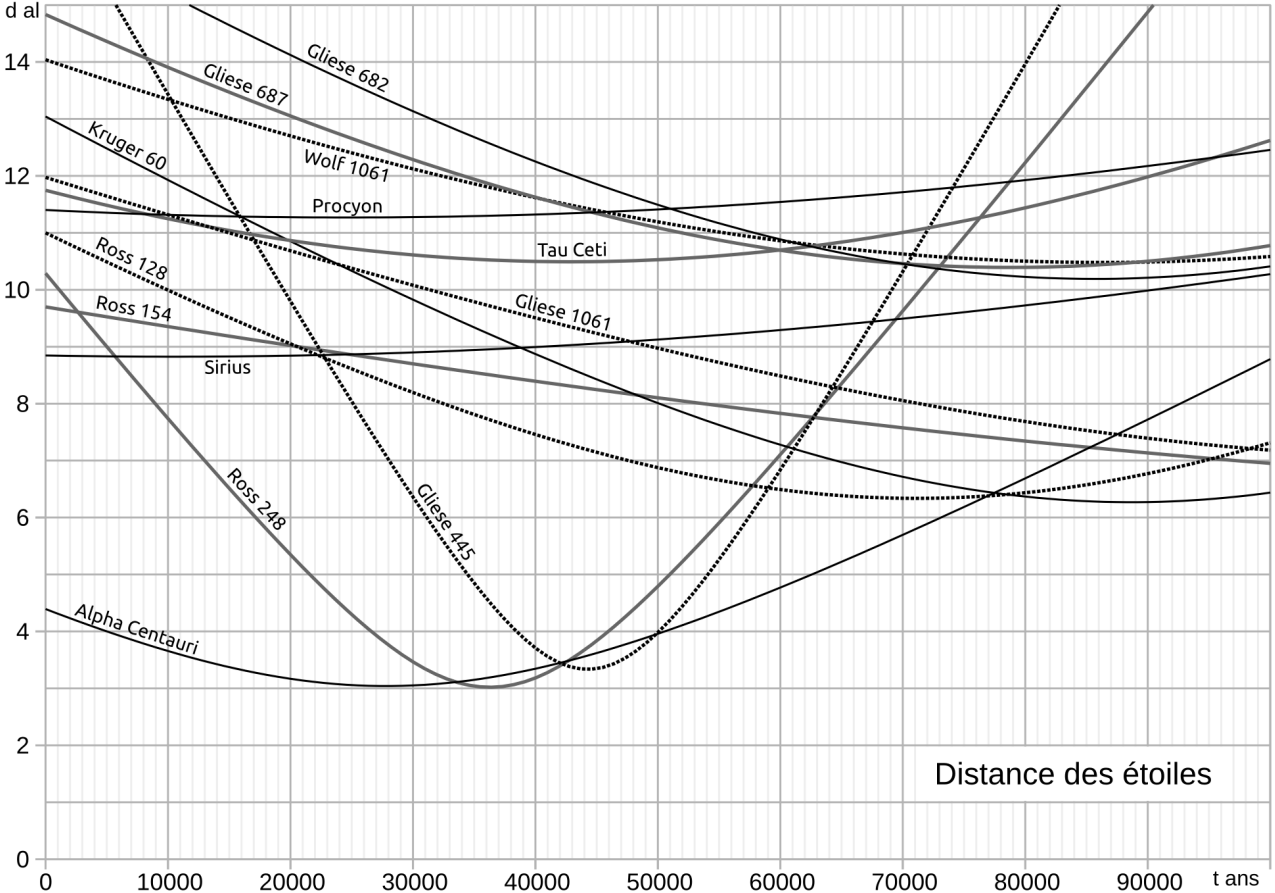
	Équatoriales		d_0	$\mu_{\alpha 0}$	$\mu_{\delta 0}$	v_{r0}	t	d	v_{sonde}	Équatoriales		Écliptiques	
Étoile	$long._0$	$lat._0$	a.l.	mas/an	mas/an	km/s	ans	a.l.	km/s	long.	lat.	long.	lat.
Alpha Centauri	219,9°	-60,8°	4,4	-3678	482	*-24,7*	27800	3,0	33	160,3°	-34,0°	177,5°	-38,6°
Ross 248	355,5°	44,2°	10,3	113	-1592	*-77,8*	36300	3,0	25	-0,1°	-28,7°	-12,4°	-26,1°
Gliese 445	176,9°	78,7°	17,1	748	481	*-111,7*	44300	3,3	23	-62,8°	17,1°	-56,6°	37,5°
Ross 128	176,9°	0,8°	11,0	608	-1223	*-31,0*	71100	6,3	27	208,7°	-46,4°	224,4°	-32,2°
Ross 154	282,5°	-23,8°	9,7	639	-194	*-10,5*	75000	7,5	30	-57,6°	-27,8°	-61,4°	-7,6°
Gliese 1061	54,0°	-44,5°	12,0	745	-374	*-20*	77000	7,8	30	95,9°	-50,2°	103,4°	-73,4°
Sirius	101,3°	-16,7°	8,6	-546	-1223	*-5,5*	84000	8,5	30	82,2°	-46,3°	74,6°	-69,4°
Gliese 682	255,6°	-44,3°	16,3	-706	-938	*-34,9*	85700	10,2	36	166,9°	-62,0°	209,0°	-58,5°
Wolf 1061	247,6°	-12,7°	14,0	-94	-1184	-21,6	86300	10,5	36	242,4°	-54,2°	251,2°	-32,5°
Kruger 60	337,0°	57,7°	13,0	-865	-462	*-33,9*	88700	6,3	21	-75,0°	10,7°	-72,2°	33,2°
Gliese 687	264,1°	68,3°	14,8	-321	-1270	*-28,8*	90000	10,5	35	252,3°	15,1°	248,4°	37,2°
Tau ceti	26,0°	-15,9°	11,7	-1730	855	*-16,6*	100000	12,6	38	-27,4°	13,6°	-20,1°	23,2°
Procyon	114,8°	5,2°	11,4	-717	-1035	*-3,2*	100000	12,5	37	94,7°	-22,4°	96,3°	-45,8°

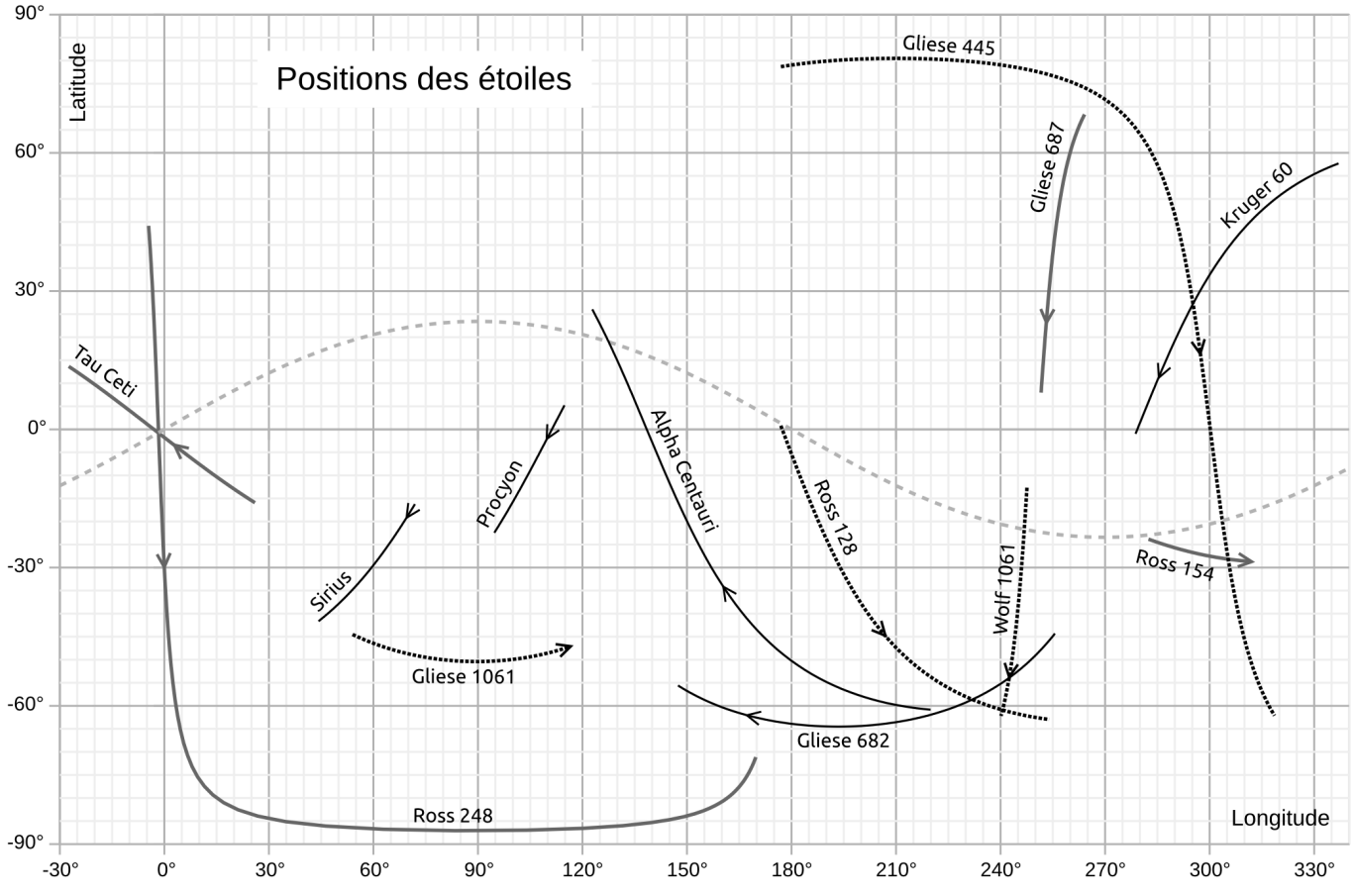
Coordonnées de 13 étoiles proches pour un voyage interstellaire lent. Six données d'entrée permettent de calculer la position des étoiles au cours du temps (hypothèse du mouvement rectiligne). La vitesse radiale est la condition initiale qui peut comporter le plus d'incertitudes. En italique les données antérieures à celle collectée par le satellite Gaïa.

Graphiques pages suivantes

Distance des étoiles :
Le graphique représente l'évolution sur 100 000 ans de la distance de treize étoiles accessibles avec un vaisseau animé d'une vitesse de moins de 40 km/s.
Les étoiles de Barnard et de Teegarden n'apparaissent pas. Il est vrai que Barnard n'est qu'à 6 al, qui plus est, elle s'approche de nous à grande vitesse, et sera à proximité dans 10 000 ans à seulement 3,8 al. Néanmoins, la sonde devrait aller à 115 km/s pour la rejoindre à son périhélie, et, ensuite, l'étoile s'éloignera à trop grande vitesse. Quant à Teegarden, elle est située à 12,6 al et s'éloigne de nous à grande vitesse (vitesse radiale positive de 68 km/s).

Position des étoiles :
Évolution d'aujourd'hui à dans 100 000 ans des coordonnées équatoriales des étoiles proches dans le ciel. La flèche indique la position où l'étoile est la plus proche. La ligne grisée représente la position actuelle de l'écliptique. La sphère céleste est projetée sur le plan de la feuille en projection de Mercator, ainsi, près des pôles, les trajectoires semblent étirées.


d al
14
12
10
8
6
4
2
0
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
70000
80000
90000
t ans
Gliese 682
Gliese 687
Kruger 60
Wolf 1061
Procyon
Tau Ceti
Ross 128
Gliese 1061
Ross 154
Sirius
Ross 248
Gliese 445
Alpha Centauri
Distance des étoiles


Positions des étoiles
Latitude
Longitude
90°
60°
30°
0°
-30°
-60°
-90°
-30°
0°
30°
60°
90°
120°
150°
180°
210°
240°
270°
300°
330°
Gliese 445
Gliese 687
Kruger 60
Tau Ceti
Procyon
Alpha Centauri
Ross 128
Wolf 1061
Ross 154
Sirius
Gliese 1061
Gliese 682
Ross 248

8. Une paire de trous noirs primordiaux peut-elle être utilisée comme porte des étoiles ?

Énoncé p329.

1 - Pour la planète Mars, l'effet de fronde est faible car la masse est petite et la distance minimale d'approche est limitée par le rayon de la planète. Avec une paire de TNP, nous avons, à la fois, une grande vitesse orbitale et une distance d'approche pouvant se rapprocher de zéro. Exprimons les caractéristiques du système à deux corps de masses égales en orbites circulaires. Nous reprenons les résultats de la fin de l'exercice *Effet de fronde* :

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{M}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{a^3}{T^2} = \frac{G M}{2\pi^2}$$

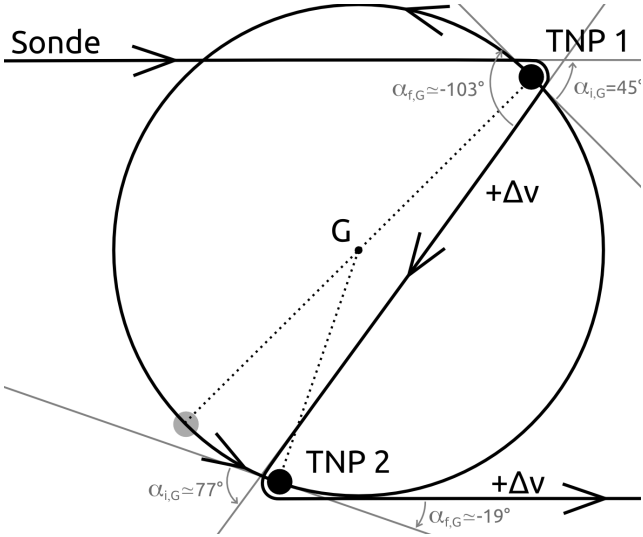
Distance entre les deux trous noirs : $d = a = GM$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi^2 d^3}{G M}} \qquad \text{et} \qquad v_{fi} = \frac{2\pi a}{T} = \sqrt{\frac{2 G M}{d}}$$

v_{fi} est la vitesse de la particule fictive et $v = v_{fi}/2$.

d	380 000 km	10 000 km	1000 km	1 km	10 m
T	8,5 jours	53min	1min40s	3 ms	3 µs
v	1,6 km/s	36 000 km/h	113 000 km/h	0,3 % de c	**3 % de c**

<u>d=10 000 km</u> : Nous arrivons sur le premier TNP avec une vitesse de 100 000 km/h (*Voyager 3* sans coup de pouce aux propergols). Prenons le cas où la sonde arrive à 45° avec la trajectoire du premier TNP :



Une paire de Trous Noirs Primordiaux transneptuniens pour accélérer une sonde.

La sonde repart d'abord vers l'arrière, elle est déviée de 120°, et, a une vitesse de 138 000 km/h. Elle arrive au deuxième TNP en moins de 4 minutes. Pendant ce temps celui-ci a tourné de 26°. La deuxième fronde propulse la sonde vers l'avant avec une vitesse de 188 000 km/h. Proxima est rejoint en 18 000 ans. La distance minimale d'approche pour le deuxième TNP vaut 66 km. Bien supérieure a son rayon de Schwarzschild mais néanmoins les forces de marée sont déjà importantes. Nous estimerons à la question suivante une distance minimale d'approche de nos TNP supérieure à 60 km pour qu'un humain puisse supporter les forces de marée.

Pour une sonde, nous pouvons aborder des trous noirs un peu plus rapides. Même si une sonde peu résister à des contraintes bien plus sévères qu'un être humain, nous serons tout de même limités par les

forces de marée qui risquent de détruire la sonde.

d=10 m : Là on atteint des vitesses proches de *c*. On pourrait dépasser les 10 % de la vitesse de la lumière et atteindre Proxima en moins de 50 ans. Mais une mission habitée est impossible vu les forces de marée, et même pour une sonde ce n'est pas envisageable, la distance entre les TNP est de l'ordre de grandeur de la taille de la sonde...

En conclusion : si de telles paires existent ce serait de bons accélérateurs pour les missions, mais pas des portes des étoiles.

2 -

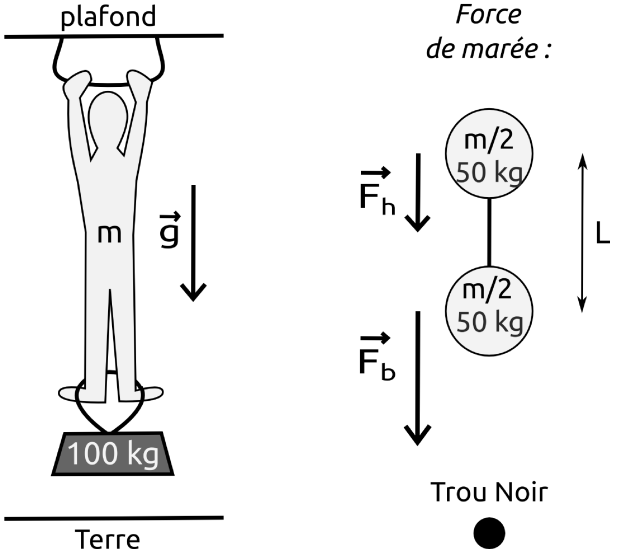


Illustration des forces de marée : Imaginez-vous accroché au plafond avec votre propre masse suspendue à vos pieds. Vous ne tiendriez que très peu de temps avant de lâcher ! Dans un vaisseau, en contournant un trou noir, il ne devrait s'exercer aucunes forces sur vous, car vous êtes en chute libre. Comme dans la station spatiale internationale où les forces de marée ne sont pas

perceptibles par les occupants en apesanteur. Mais trop proche d'un astre massif la différence de force de gravitation entre vos pieds, dirigés vers l'astre attracteur, et votre tête devient non négligeable : le champ de gravitation ne peut plus être considéré comme uniforme. Par exemple, pour Saturne, géante gazeuse, trop près d'elle, les satellites naturels ne peuvent plus exister et sont broyés en anneaux. Nous avons modélisé l'astronaute par deux masses distantes d'un mètre. Les parties de son corps plus proche de l'astre subissent une force de gravitation plus élevée.

Calcul de la force différentielle de marée :

$$F_b - F_h = F_{marée} = mg = \frac{G M_{TNP} m/2}{r_{min}^{\ 2}} - \frac{G M_{TNP} m/2}{(r_{min}+L)^2}$$

L est très petit devant r_{min} d'où :

$$F_{marée} = \frac{G M_{TNP} m}{2 r_{min}^{\ 2}} \left[1 - \left(1 + \frac{L}{r_{min}} \right)^{-2} \right] \simeq \frac{G M_{TNP} m}{2 r_{min}^{\ 2}} \left[1 - \left(1 - 2\frac{L}{r_{min}} \right) \right]$$

$$\text{et} \quad r_{min} = \sqrt[3]{\frac{G M_{TNP} L}{g}} \simeq 60\,km.$$

9. Collisions d'antiprotons

Énoncé p330.

1 - Dans le référentiel du centre d'inertie, l'impulsion totale est nulle et les deux protons arrivent l'un en face de l'autre avec les mêmes vitesses. Après collision, en se plaçant au seuil pour une création de paires, nous avons quatre particules au repos : les deux protons initiaux et la paire proton/antiprotons.

Comme l'énergie totale se conserve :

$$2E = 4E_0,\quad 2m\gamma c^2 = 4mc^2,\quad \gamma = 2 \text{ et } \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 87\,\%$$

De retour dans le référentiel du laboratoire, nous calculons la vitesse du proton sur sa cible :

$$\beta_{lab} = \frac{\beta + \beta}{1 + \beta^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \simeq 99\,\% \quad \text{et} \quad \gamma_{lab} = 7.$$

$$E = \gamma E_0 = E_c + E_0 \quad \text{et} \quad E_{c\ min} = 6E_0 \simeq 5{,}63\ GeV$$

2 - Pour commencer un antiproton très énergétique est difficile à piéger d'où l'intérêt de, d'abord, le freiner. S'il rencontre en premier lieu une cible et créé une paire, l'antiproton ainsi créé sera bien moins énergétique. Son énergie au seuil dans le laboratoire :

$$E = \gamma E_0, \quad \gamma = 2 \quad \text{et} \quad E_c = E_0 \simeq 1\,GeV < 6E_0.$$

Nous obtenons des antiprotons d'énergie cinétique six fois moindre.

Aussi nous pourrions utiliser les p d'énergie cinétique au delà de 6 GeV pour créer des $\overline{p}$. Nous pourrions en créer ainsi en grande quantité, car les protons ont un flux 10 000 fois supérieur aux $\overline{p}$.

10. Le mouvement hélicoïdal

Énoncé p330.

1 -

$$\begin{cases} \rho(t) = r \\ \theta(t) = \omega t \\ z(t) = v_z t \end{cases} \qquad z = \frac{v_z}{\omega}\theta$$

2 - $\begin{cases} \dot{x} = -\omega r \sin \omega t \\ \dot{y} = \omega r \cos \omega t \\ \dot{z} = v_z \end{cases}$ $\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 r \cos \omega t \\ \ddot{y} = -\omega^2 r \sin \omega t \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$ $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ $\vec{a} \propto \overrightarrow{MH}$

3-4 - $v = \sqrt{\omega^2 r^2 + v_z^{\,2}} = cste$ $\frac{dv}{dt} = 0$ $a = \omega^2 r = cste = \frac{v^2}{R}$

$$R = r + \frac{v_z^{\,2}}{\omega^2 r} \qquad p = \frac{2\pi v_z}{\omega} \qquad R = r + \frac{p^2}{4\pi^2 r}$$

5 - $l = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sqrt{r^2 d\theta^2 + dz^2} = 2\pi \sqrt{r^2 + \frac{v_z^2}{\omega^2}} = 2\pi r \sqrt{1 + \frac{p^2}{4\pi^2 r^2}}$

$v_{\parallel} = v_z$ $v_{\perp} = \omega r$ $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$ $r = \frac{v_{\perp}^2}{v^2} R = \cos^2 \alpha \, R$

$$l = 2\pi \frac{v_{\perp}^2}{v^2} R \sqrt{1 + \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}^2}} = 2\pi R \frac{v_{\perp}}{v} = 2\pi r \frac{v}{v_{\perp}}$$

$$l = 2\pi R \cos \alpha = \frac{2\pi r}{\cos \alpha}$$

Ces deux dernières expressions ne dépendent que des grandeurs géométriques *r* et α, elles ne dépendent que de la forme de la trajectoire et non de la vitesse à laquelle elle est parcourue. Ces formules sont donc aussi vraies pour un mouvement hélicoïdal non uniforme.

11. La magnétosphère

Énoncé p331.

1 - Force magnétique : $\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$.

Puissance d'une force : $P = \vec{f} \cdot \vec{v}$ d'où $P = 0$.

Théorème de la puissance cinétique : $P = \frac{dT}{dt}$

(*E* ou *T* car l'énergie de masse est constante).

Soit : $T=(\gamma-1)mc^2=cste$ et $v=cste$.

2 - Trajectoire hélicoïdale

Résolution du système d'équations différentielles :

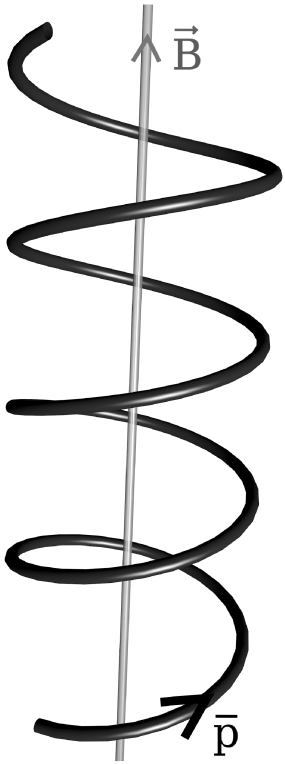
$$m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt}=q\vec{v}\wedge\vec{B} \qquad \vec{v}=\vec{v_\perp}+\vec{v_\parallel} \qquad (\gamma \text{ est ici constant})$$

Mouvement, projeté dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$,

circulaire de rayon $R=\frac{m\gamma v_\perp}{|q|B}$.

Une particule négative tourne dans le sens trigonométrique pour un champ $\vec{B}$ vers l'avant.

Pulsation cyclotron : $\omega=\frac{|q|B}{m\gamma}$.



Mouvement, projeté selon la direction de $\vec{B}$, uniforme. Hélice à pas constant.

Les particules chargées s'enroulent autour des lignes de champ magnétique.

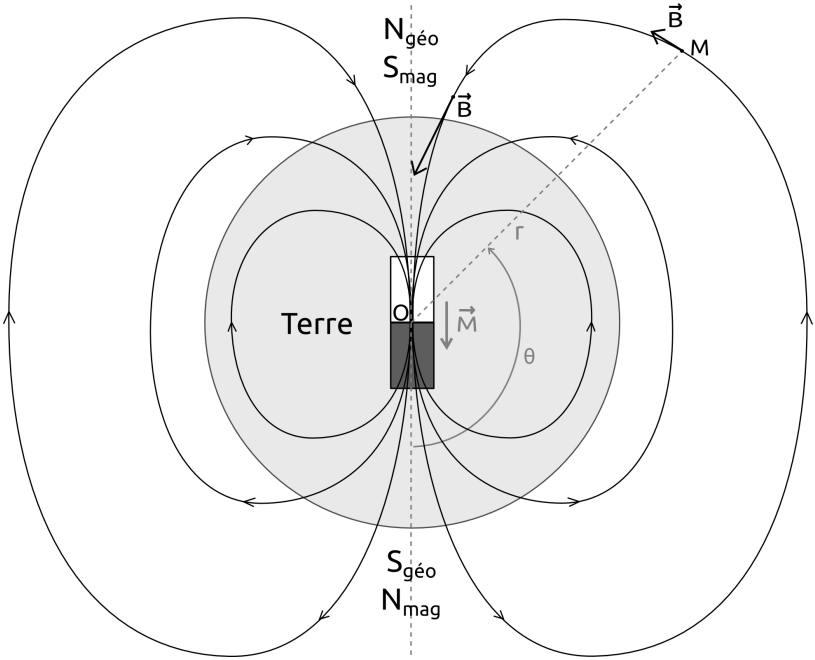
3 - Les lignes de champs magnétiques vont du Nord vers le Sud (pôles magnétiques). Le Nord d'une boussole est attiré par le Sud magnétique terrestre situé non loin du nord géographique (convention historique d'un "Nord" magnétique).

Le flux magnétique se conserve : $\Phi=\oiint \vec{B}\cdot\vec{dS}=0$.

Conséquence : par conservation du flux sur un tube de champs, le champ magnétique est plus intense quand les lignes de champs se resserrent.

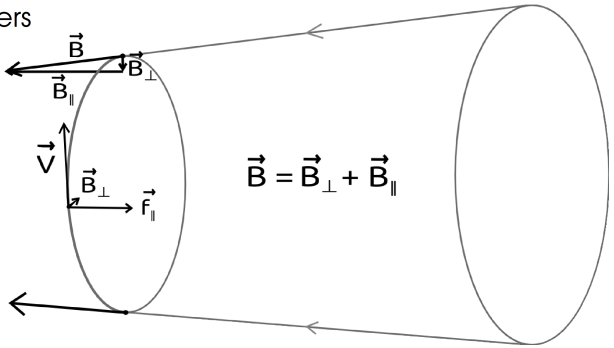
Composantes de $\vec{B}$ en coordonnées sphériques :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} M \frac{2\cos\theta}{r^3}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} M \frac{\sin\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\varphi = 0.$$



$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} m.T/A \quad \text{et} \quad M = 7{,}7.10^{22} A.m^2$$

4 - Quand les lignes d'un tube se resserrent, le champ n'est plus homogène et il apparaît une force qui repousse la particule vers la zone de champ faible :

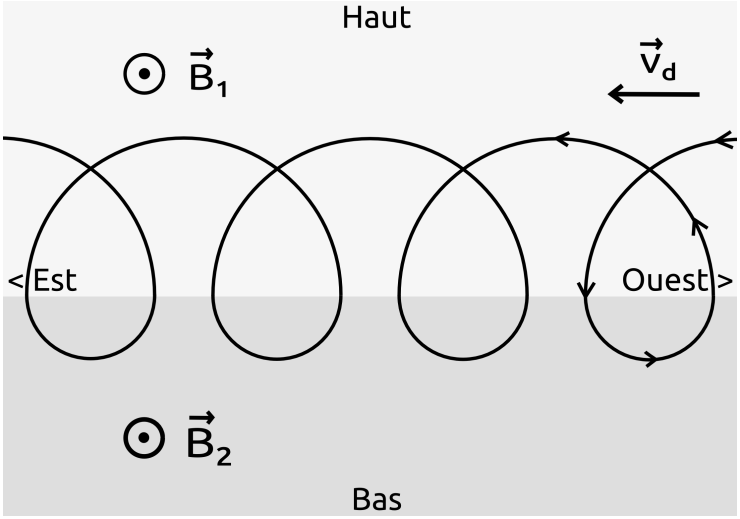


$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge (\vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel) = \vec{f}_\perp + \vec{f}_\parallel \quad \text{et} \quad \vec{f}_\parallel = q\vec{v} \wedge \vec{B}_\perp.$$

Les particules chargées, piégées dans la magnétosphère, font des aller-retours entre les pôles (pour donner quelques ordres de grandeur, un électron peut faire un aller-retour en une seconde, pour les protons et les antiprotons c'est plus long : quelques dizaines de secondes. Ça dépend de l'énergie de la particule et de sa distance à la Terre).

5 - Les lignes de champs se desserrent avec l'altitude. Le champ est donc plus intense vers le bas avec un rayon de courbure plus faible. Notre modèle en deux zones, en combinant des demi-cercles de rayons différents, donne une vitesse moyenne de dérive vers l'Est pour une particule de charge négative :

$$v_d = \frac{D_1 - D_2}{\frac{T_1}{2} - \frac{T_2}{2}} = 2v\frac{B_2 - B_1}{B_1 + B_2}$$



Dérive d'une particule chargée dans un champ non-uniforme. Les électrons, protons, et antiprotons font le tour de la Terre en dérivant.

6 - <u>Piège</u> :

a- $\vec{B}=B_r\vec{u}_r+B_\theta\vec{u}_\theta+B_\varphi\vec{u}_\varphi=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$

Sans rentrer dans les détails techniques :

$$\vec{u}_r=\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+\cos\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{u}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j}-\sin\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{u}_\varphi=-\sin\varphi\,\vec{i}+\cos\varphi\,\vec{j}$$

D'où : $\vec{B}(x,y,z)=\dfrac{\mu_0 M}{4\pi r^5}[3xz\,\vec{i}+3yz\,\vec{j}+(2z^2-x^2-y^2)\vec{k}]$

avec $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

b- $\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{q}{m}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\,\vec{v}\wedge\vec{B}=\dfrac{q}{m\gamma}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\dot{v}_x=\dfrac{q}{mc}(v_yB_z-v_zB_y)\sqrt{c^2-v_x^2-v_y^2-v_z^2}\\ \dot{v}_y=\dfrac{q}{mc}(v_zB_x-v_xB_z)\sqrt{c^2-v_x^2-v_y^2-v_z^2}\\ \dot{v}_z=\dfrac{q}{mc}(v_xB_y-v_yB_x)\sqrt{c^2-v_x^2-v_y^2-v_z^2}\end{cases}$$

$B_x(x,y,z)\quad B_y(x,y,z)\quad B_z(x,y,z)$

c-

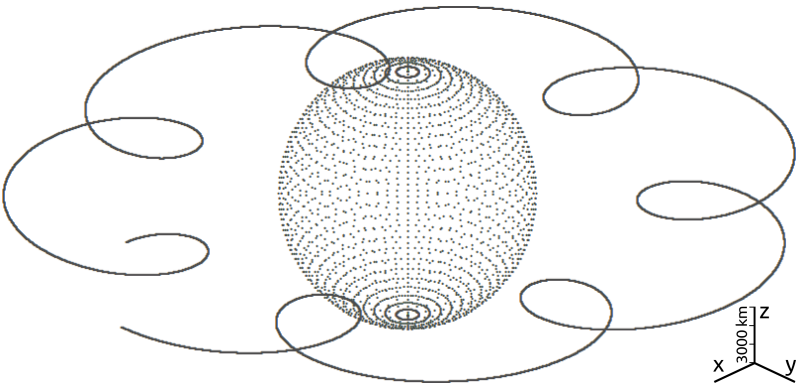
$$\begin{cases}\dot{x}=v_x=A(v_x) & A_1\ A_2\ A_3\ A_4\\ \dot{y}=v_y=B(v_y) & B_1\ B_2\ B_3\ B_4\\ \dot{z}=v_z=C(v_z) & C_1\ C_2\ C_3\ C_4\\ \dot{v}_x=D(x,y,z,v_x,v_y,v_z) & D_1\ D_2\ D_3\ D_4\\ \dot{v}_y=E(x,y,z,v_x,v_y,v_z) & E_1\ E_2\ E_3\ E_4\\ \dot{v}_z=F(x,y,z,v_x,v_y,v_z) & F_1\ F_2\ F_3\ F_4\end{cases}$$

d-

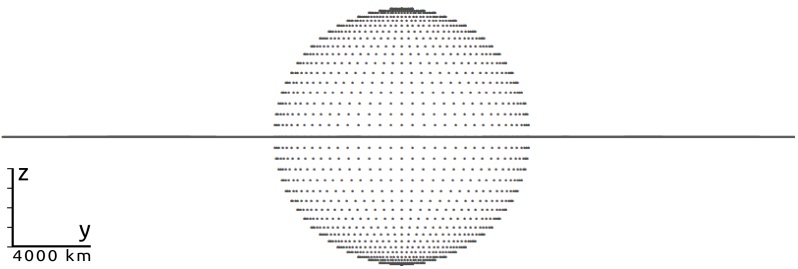
• ***Cas d'un antiproton de 2 GeV piégé dans le plan équatorial :*** Nous allons nous faire la main avec ce cas particulier où le mouvement est plan. Initialement l'antiproton est placé à 20 000 km du centre de la Terre et a une vitesse de 95 % de *c* dirigée vers l'Est.

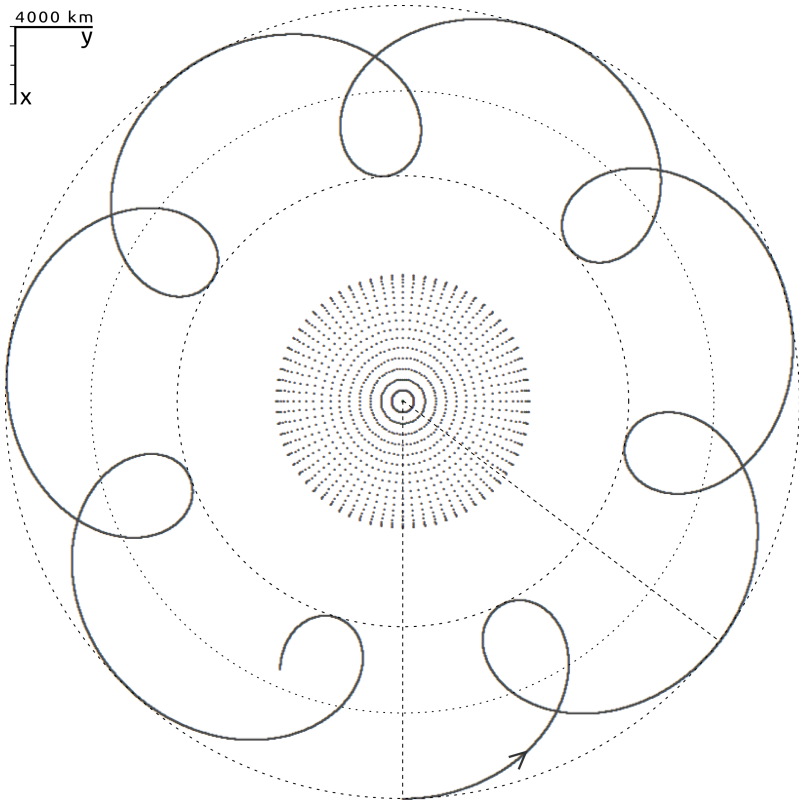
-Courbes : sur T=0,8 s avec n=500 000 itérations :

Vue de Profil



Vue de côté





-Caractéristiques **:** La particule effectue sa rotation cyclotron tout en dérivant vers l'Est. L'antiproton fait le tour de la Terre en un peu plus de 0,8 seconde et réalise, dans le même temps, environ 7 rotations cyclotron. Sur une rotation cyclotron l'angle varie de 53° et il s'écoule 0,12s :

$$T_{cyclo} \simeq 0{,}12 \text{ s} \quad \text{et} \quad T_{dérive} \simeq 0{,}82 \text{ s.}$$

Retrouvons l'ordre de grandeur de la période cyclotron avec nos formules. Tout d'abord, l'expression du champ magnétique dipolaire est simplifiée dans le plan équatorial :

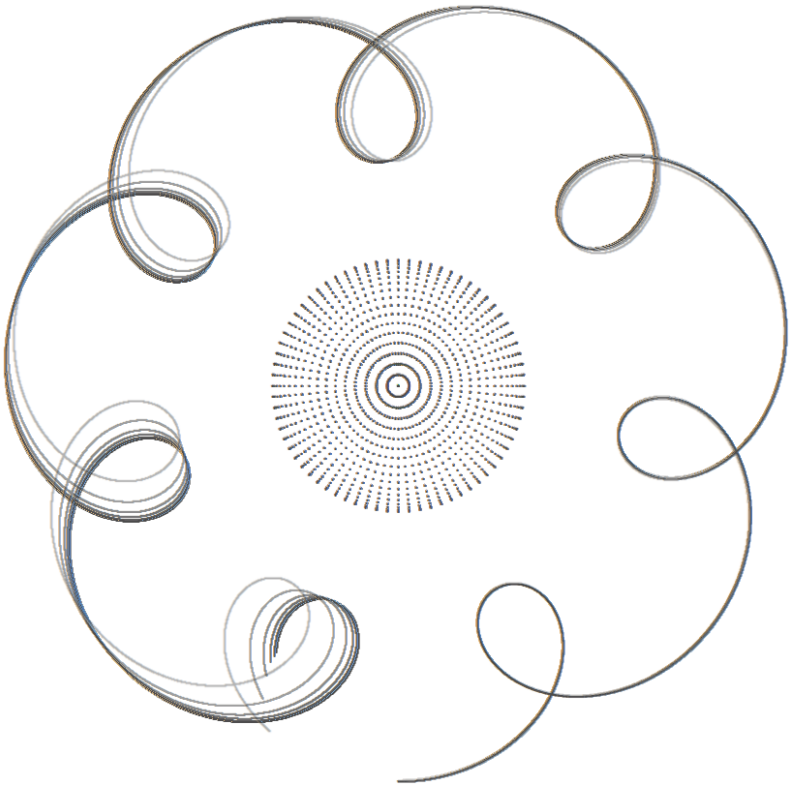
$$\vec{B}(x,y,0) = -\frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\vec{k} \quad \text{avec} \quad \frac{\mu_0 M}{4\pi} = 7{,}7.10^{15} T.m^3$$

La trajectoire est située entre $r_{min} \simeq 11\,400$ km et $r_{max} \simeq 20\,000$ km avec $r_{moy} \simeq 15\,700$ km. D'où $B_{max} \simeq 5{,}2.10^{-6}$ T, $B_{min} \simeq 0{,}96.10^{-6}$ T et $B_{moy} = 2{,}0.10^{-6}$ T :

$$T_{cyclo} \simeq 2\pi \frac{m\gamma}{e B_{moy}} \simeq 0{,}10\,s$$

ce qui est convenable vu la grande inhomogénéité du champ magnétique. Les variations de fréquence cyclotron sont supérieures à un facteur 5 entre les périgées et les apogées. Si la particule faisait le tour de la Terre selon un périmètre de 20 000 km, elle mettrait 0,44 s.

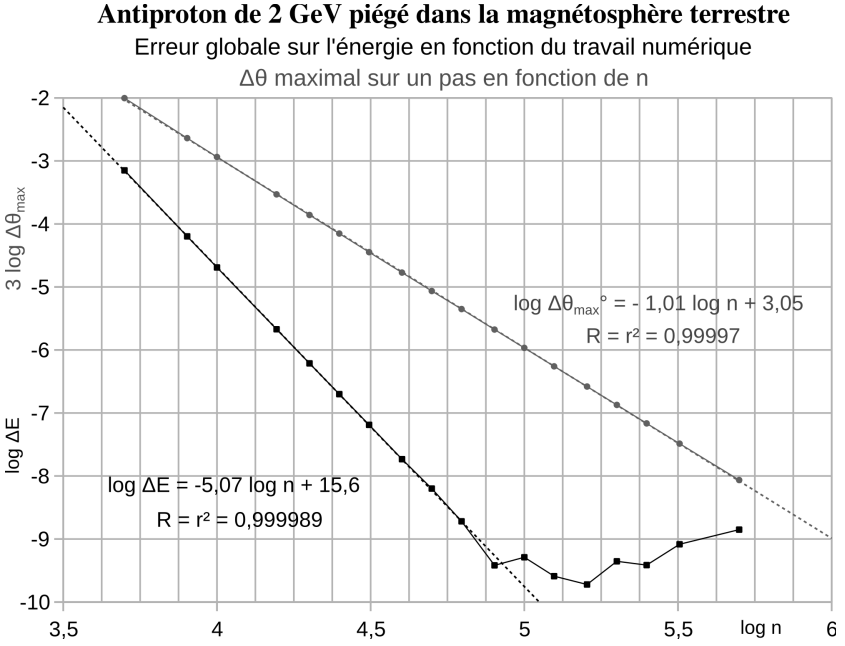
-Stabilité de la trajectoire **:** Nous calculons des trajectoires pour *n* croissant et observons si celles-ci tendent vers une trajectoire stable.



Les simulations convergent : en noir n=500 000, et, à chaque division par deux du travail numérique, en gris chaque fois plus clair, n=250 000, n=125 000, n=62 500, n=31 250, et n=15 625.

-Erreur sur l'énergie **:**

L'énergie d'une particule est constante dans un champ magnétique. Nous traçons l'erreur sur l'énergie en fonction du nombre d'itérations.



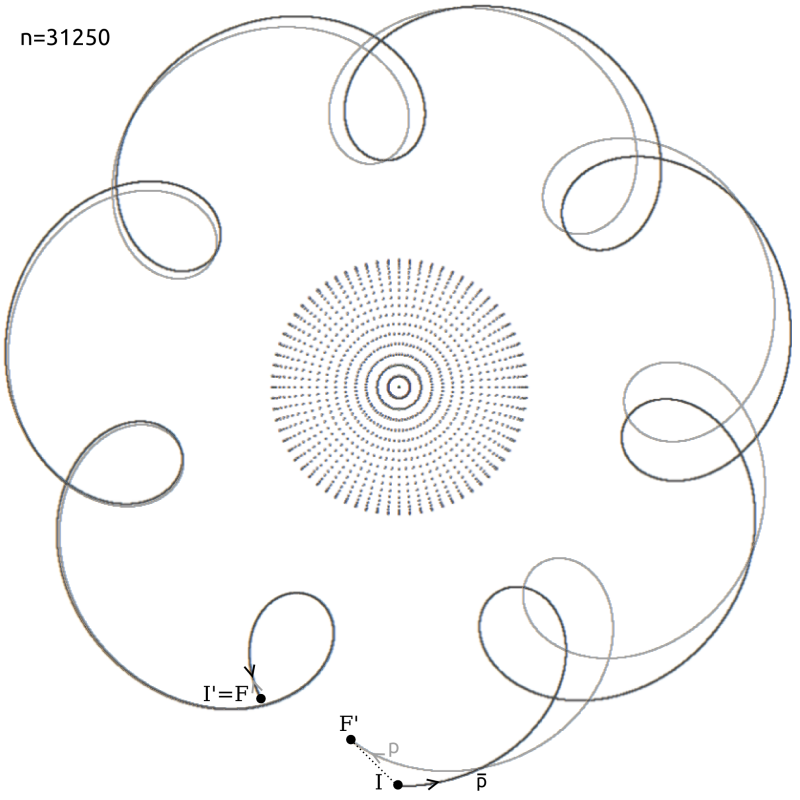
Le comportement est excellent, les variations d'énergie diminuent exponentiellement et rapidement avec le travail. Nous avons une diminution très régulière (coefficient de corrélation proche de 1) et sans accidents ; nous sommes rassurés sur la convergence. Les variations hasardeuses en travail élevé sont normales, elles sont dues aux erreurs d'arrondis. En effet dans le programme nous avons des nombres d'une précision de 14 chiffres significatifs, or, pour une précision de 10^{-10} MeV

et une énergie de 2000 MeV, le maximum de précision est justement atteint. En gris, la variation d'angle maximale sur un pas. Nous constatons cette valeur atteinte en fin de calcul sur le dernier virage où la courbure est importante. Là encore le résultat est très bon.

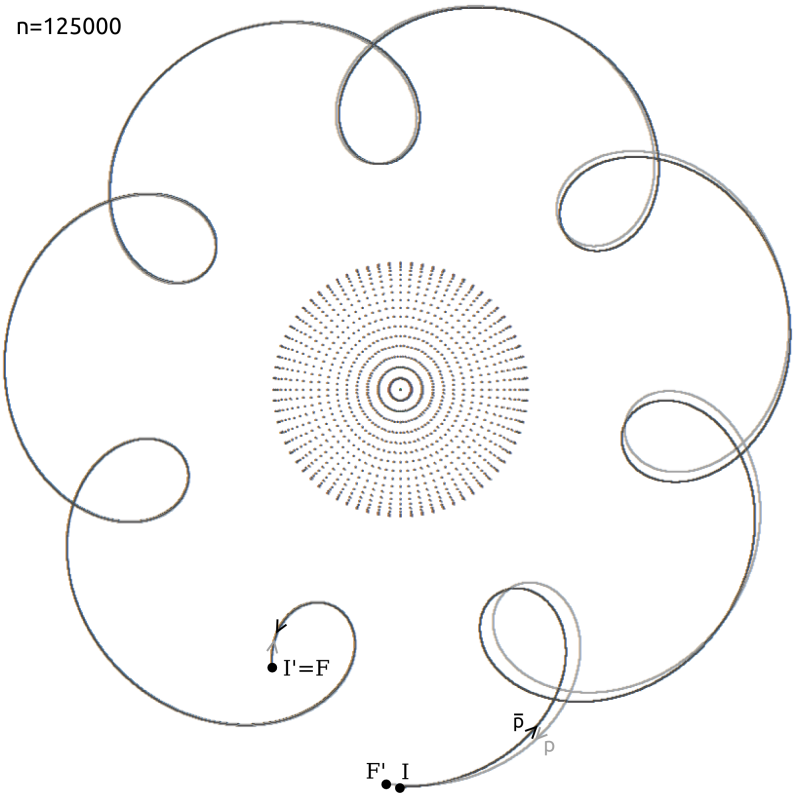
-Le test de l'antiparticule **:** Notre trajectoire part d'un point initial I pour rejoindre un point final F. Nous considérons maintenant une autre particule de même masse et de charge opposée qui part avec les conditions finales de la première I'=F pour rejoindre son point final F'. La particule de charge opposée part de la même position avec une vitesse en sens inverse. En toute logique l'antiparticule doit revenir en arrière et parfaitement reprendre le chemin dans l'autre sens pour finir en F'=I. La force est la même et le changement de signe de la vitesse revient à remonter le temps. La trajectoire n'étant pas exacte nous pourrons estimer l'écart avec la trajectoire idéale.

Évolution de la distance entre I et F' :

T=0,8 s	pas	n	$d_{F'I}$
RK4	h= 25,6 µs	31250	3240 km
RK4	h= 6,4 µs	125000	688 km
RK4	h= 1,6 µs	500000	167 km
RK4 A	Δθ= 0° 0' 5,65"	A 31250 / R 31542	2354 km

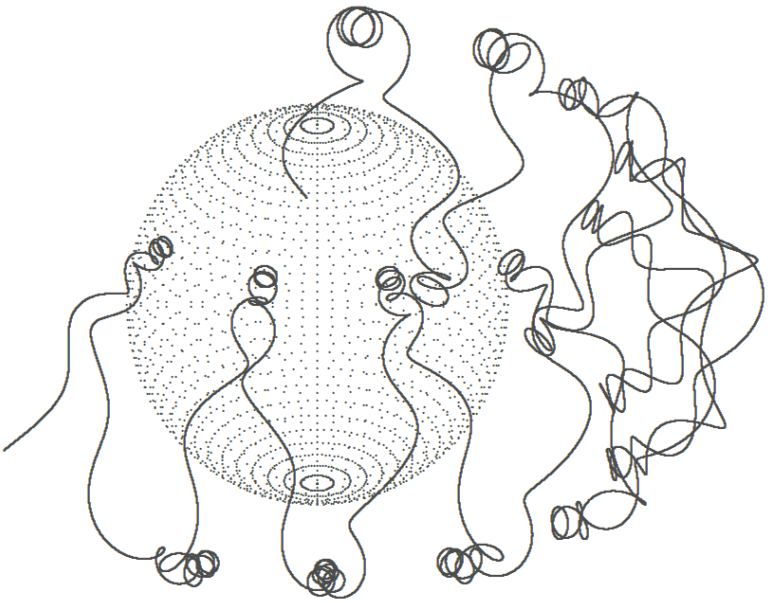


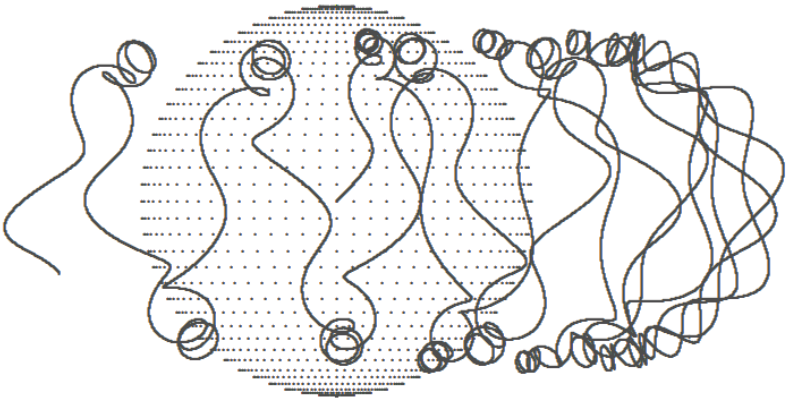
Principe de retour inverse : *Tout comme un photon reprend le même chemin s'il repart dans l'autre sens, de même que la sonde* Voyager *reprendrait les frondes en ordre inverse pour ralentir jusqu'à la Terre, un proton repasse par la trajectoire de l'antiproton pour revenir à sa position initiale. Une simulation que ne vérifie pas approximativement cette propriété n'est pas valide.*

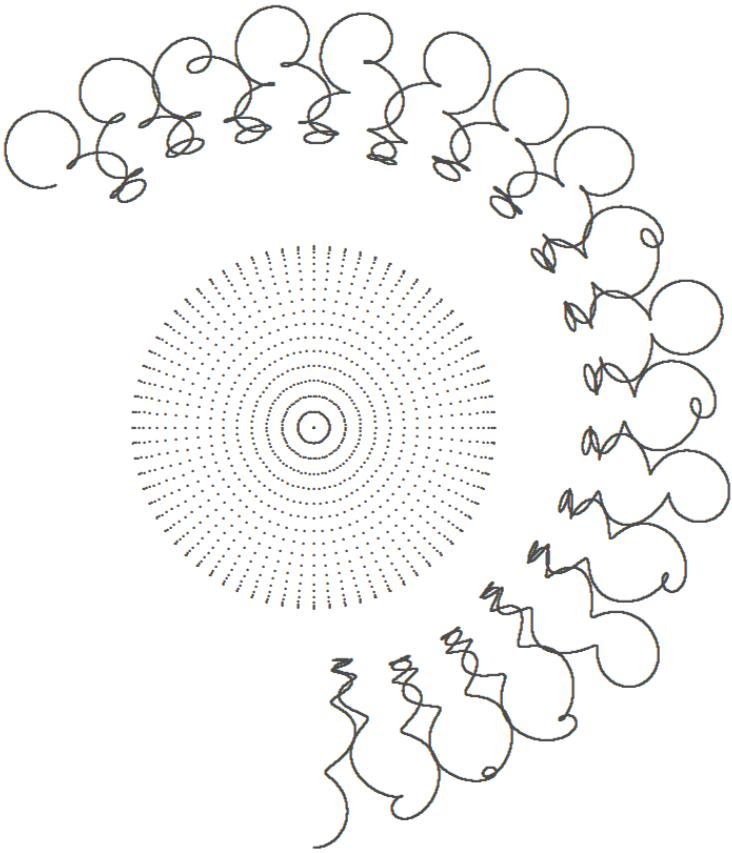


• ***Cas d'un antiproton de 500 MeV :***
Initialement l'antiproton est placé dans le plan équatorial à 14 800 km du centre de la Terre avec une vitesse de 76 % de *c* dirigée vers le Nord-Est.

-Courbes : sur T=2 s avec n=500 000 :







-Caractéristiques **:** L'antiproton fait le tour de la Terre en près de 3 secondes. Dans le même temps il y a environ 13 aller-retours entre les pôles. Et sur chaque aller-retour entre les miroirs nous décomptons une vingtaine de rotations cyclotrons :

$T_{dérive} \simeq 3{,}2$ s , $T_{pôles} \simeq 0{,}24$ s et $T_{cyclo} \simeq 8{,}9$ ms à 42 ms.

La période cyclotron est inversement proportionnelle à l'intensité du champ magnétique. Le champ magnétique varie de $2{,}4.10^{-6}$ T à l'équateur à 11.10^{-6} T aux pôles. À l'approche des pôles le rayon de courbure devient faible

autour de 300 km. Il s'égalise aux points miroirs avec le rayon cyclotron, le pas de l'hélice devient alors nul et le mouvement est momentanément plan avec une vitesse, parallèle au champ magnétique, nulle. Au départ, à l'équateur, le rayon de courbure R_{courb} vaut 2167 km, le rayon cyclotron R_{cyclo} 1083 km et le pas p de l'hélice 6806 km.

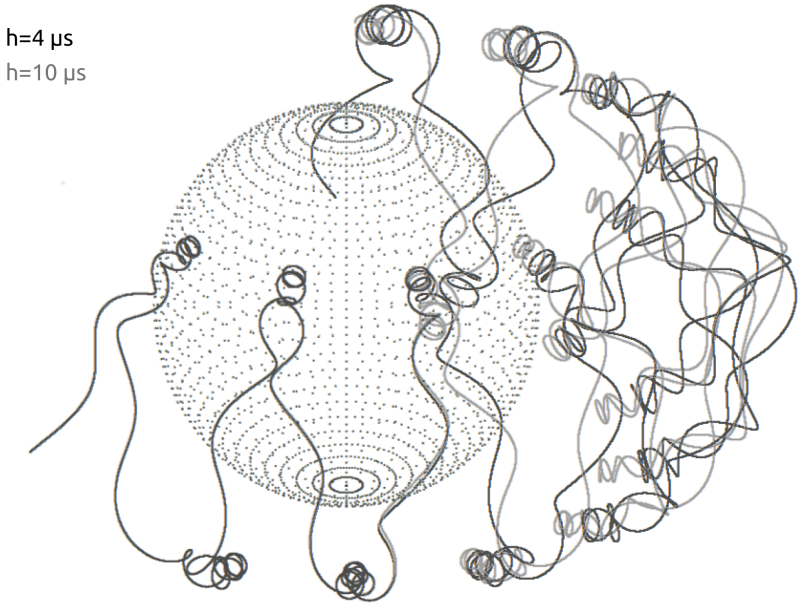
Calcul du rayon de courbure : $\frac{dv}{dt}=0$ d'où $R_{courb}=\frac{v^2}{a}$.

Calcul du pas de l'hélice : $v_{\parallel}=\frac{\vec{v}\cdot\vec{B}}{B}$ et $p=v_{\parallel}T_{cyclo}$.

Calcul du rayon cyclotron : $v_{\perp}=\sqrt{v^2-v_{\parallel}^2}$ et $R_{cyclo}=\frac{v_{\perp}}{\omega_{cyclo}}$

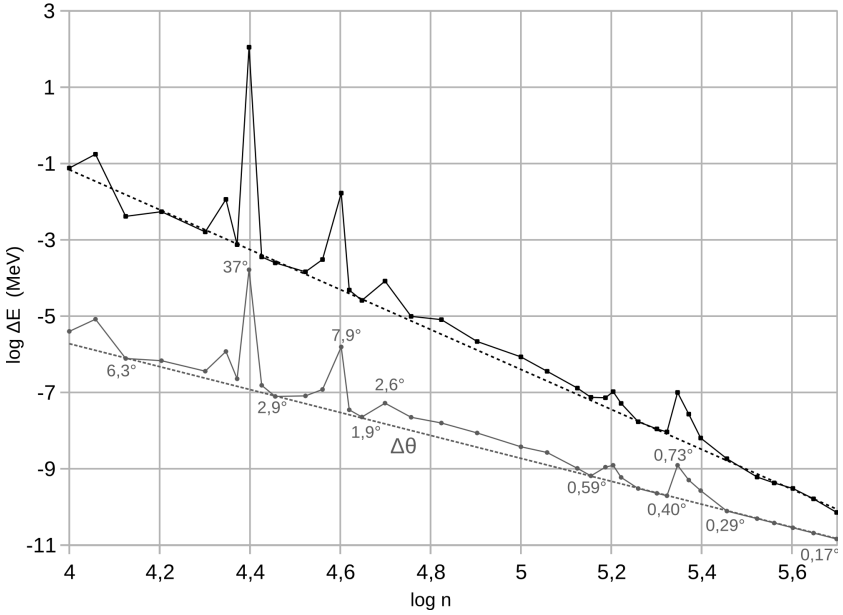
-Stabilité de la trajectoire **:** En noir, nous reconnaissons la trajectoire pour *n=500 000*. En gris, celle pour *n=200 000*. Jusqu'au quatrième miroir il y a une bonne correspondance, ensuite les courbes divergent et deviennent sensiblement différentes. Sur la courbe en gris les courbures deviennent plus fortes et les vrilles sont plus piquées.

-Erreur sur l'énergie **:** Ici les courbes d'erreur sont plus accidentées que pour l'antiproton de 2 GeV dans le plan équatorial. Nous avons régulièrement des pics au-dessus d'une ligne de base. Les pics sur la variation d'énergie et la variation d'angle sont corrélés. Comme nous pouvions le pressentir, c'est sur les parties les plus courbées de la trajectoire, que l'énergie peine à se conserver.



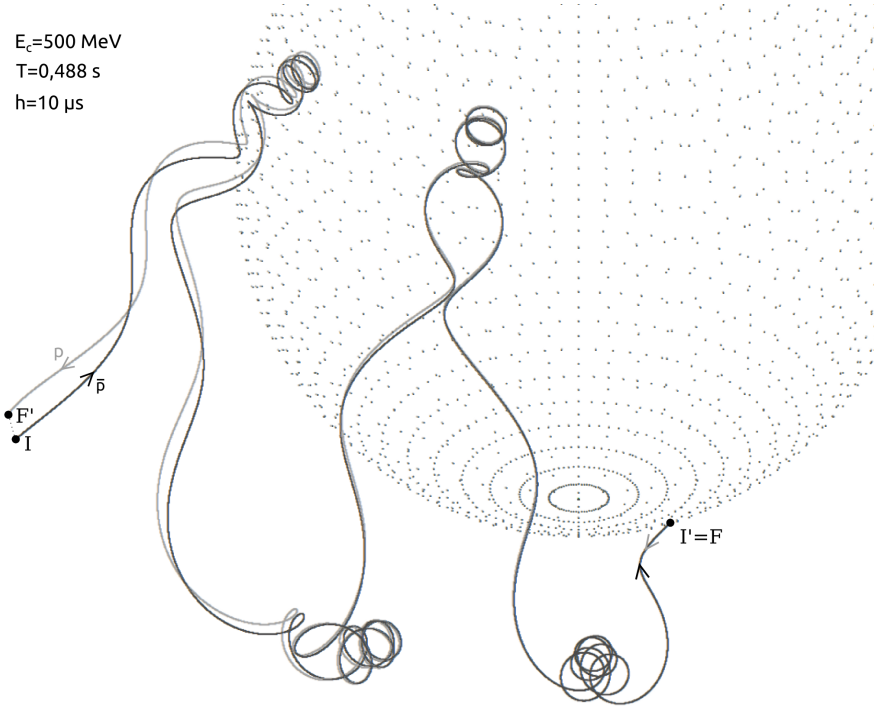
Antiproton de 500 MeV piégé dans la magnétosphère terrestre

Erreur globale sur l'énergie en fonction du travail numérique



-Le test de l'antiparticule **:** Nous effectuons le test sur deux aller-retours entre les pôles.

T=0,488 s	pas temporel	n	$d_{F'I}$
RK4	h= 10 µs	48800	463 km
RK4	h= 4 µs	122000	188 km
RK4	h= 1 µs	488000	39 km



Nous réussissons à simuler une ceinture d'antiprotons dans la magnétosphère de la Terre. Pour des résultats précis une puissance de calcul importante est nécessaire.

Fichier : www.voyagepourproxima.fr/magnetique.php
code source : .../docs/magnetique.txt

12. Piège de Penning

Énoncé p333.

1 - Ce champ de vecteur dérive d'un potentiel si les dérivées croisées sont égales :

Si V existe : $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$

Par exemple,

$\frac{\partial V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial V}{\partial y \partial x}$ si et seulement si $\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$.

Or toutes les dérivées croisées sont nulles, la condition est donc vérifiée.

Intégration : $V = \frac{U_0}{r_0^2}\left(\frac{x^2+y^2}{2} - z^2\right) + cste, \quad r_0 = \sqrt{2}\, z_0.$

2 - $\vec{F} = q\vec{E}$ d'où $\vec{F}(O) = \vec{0}$: position d'équilibre.

Stabilité : $E_p = qV$ (énergie potentielle).

$\frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} = +\frac{2eU_0}{r_0^2} > 0,$ stable selon (Oz).

$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} = -\frac{2eU_0}{r_0^2} < 0$ et $\frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2} = -\frac{2eU_0}{r_0^2} < 0,$

instable selon (Oxy).

3-a- Force magnétique :

$$\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -e\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = -e\begin{pmatrix} B_0 \dot{y} \\ -B_0 \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La force selon z est nulle : l'équilibre et la stabilité selon cette direction ne sont pas modifiées.

3-b- Principe fondamental de la dynamique :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix}=-e\begin{pmatrix}-\dfrac{U_0}{r_0^2}x+B_0\dot{y}\\ -\dfrac{U_0}{r_0^2}y-B_0\dot{x}\\ \dfrac{2U_0}{r_0^2}z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}(1)\quad \ddot{x}=\dfrac{eU_0}{mr_0^2}x-\omega_c\dot{y}\\ (2)\quad \ddot{y}=\dfrac{eU_0}{mr_0^2}y+\omega_c\dot{x}\\ \ddot{z}=-\dfrac{2eU_0}{mr_0^2}z\end{cases}$$

(1)+j(2) $\Rightarrow\quad \ddot{\rho}-j\omega_c\dot{\rho}-\dfrac{eU_0}{mr_0^2}\rho=0$

Équation caractéristique avec $\rho=Ae^{rt}$:

$$r^2-j\omega_c r-\frac{eU_0}{mr_0^2}=0 \quad \text{et} \quad \Delta=-{\omega_c}^2+\frac{4eU_0}{mr_0^2}.$$

Les solutions sont harmoniques si l'exponentielle est à argument complexe :

un discriminant négatif donne $\omega_c>\sqrt{\dfrac{4eU_0}{mr_0^2}}$.

D'où : $\quad B_0>\sqrt{\dfrac{4mU_0}{er_0^2}}=B_c.$

Oscillations selon z : $\quad \ddot{z}=-\dfrac{eU_0}{mR^2}z$ et $\ddot{z}+{\omega_z}^2z=0,$

solutions de la forme : $\quad z(t)=z_M\cos(\omega_z t+\varphi),$

d'où : $\quad \omega_z=\sqrt{\dfrac{2eU_0}{mr_0^2}}.$

3-c- $r = j\,\omega_c \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\,m\,U_0}{e\,r_0^2\,B_0^{\,2}}}\right)$

solutions : $\rho = A\,e^{j\omega_c' t} + B\,e^{j\omega_m t}$, $(A,B) \in \mathbb{C}^2$,

$$\omega_c' = \omega_c \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\,m\,U_0}{e\,r_0^2\,B_0^{\,2}}}\right)$$

$$\omega_m = \omega_c \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\,m\,U_0}{e\,r_0^2\,B_0^{\,2}}}\right)$$

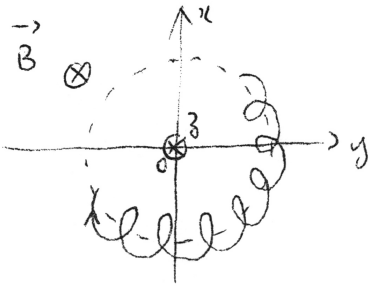
A.N. : $B_c \simeq 2{,}14\,mT \ll B_0$,

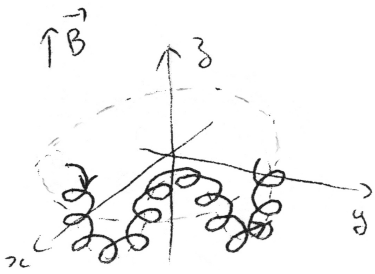
$\omega_z \simeq 145\,rad/s$, $f_z \simeq 58\,kHz$,

$\omega_m \simeq 199\,rad/s \simeq 32\,tours/s$,

$\omega_c \simeq \omega_c' \simeq 52{,}7.10^6\,rad/s$ et $f_c \simeq f_c' \simeq 8{,}4\,MHz$.

3-d-





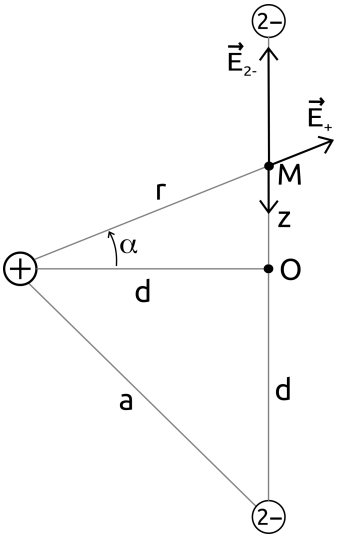
4 - Cage microscopique :

a - Ce n'est pas un monopôle électrique, car la charge totale est nulle. Ce n'est pas un dipôle, car les barycentres des charges positives et négatives sont confondus. Cette distribution de

charge peut donc correspondre à celle d'un quadripôle.

b - $B_0 = 2\,B_r\left(r=\frac{a}{\sqrt{2}},\theta=0\right)=2\frac{\mu_0}{4\pi}\mu_B\frac{2\cos\theta}{r^3}$

et $B_0=\frac{1}{\pi}\frac{\mu_0\mu_B}{d^3}\simeq 10{,}5\,T$ avec $d=\frac{a}{\sqrt{2}}$.



c - Le champ électrique total est la somme des champs électriques générés par les six charges supposées ponctuelles.
Nous nous plaçons sur l'axe (Oz) vertical orienté selon les deux moments magnétiques.

Au point M(z, 0, 0) :

$$E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{(-2e)}{(d-z)^2}+\frac{(-2e)}{(d+z)^2}+4\times\sin\alpha\times\frac{e}{d^2+z^2}\right]$$

Avec z petit devant d : $\sin\alpha\simeq\tan\alpha=z/d$

$$E\simeq\frac{e}{2\pi\epsilon_0 d^2}\left[\left(1-\frac{z}{d}\right)^{-2}-\left(1+\frac{z}{d}\right)^{-2}+2\frac{z}{d}\left(1+\frac{z^2}{d^2}\right)^{-1}\right]$$

d'où $E\simeq\frac{3e}{\pi\epsilon_0 d^3}z\sim 2\frac{U_0}{r_0^2}z$

d - $B_c = \sqrt{\frac{4 m U_0}{e r_0^2}} \sim \sqrt{\frac{6 m}{\pi \epsilon_0 d^3}} \simeq 32.10^6 T \gg B_0$

Le champ magnétique est totalement insuffisant avec un facteur de l'ordre d'un million pour piéger les antiprotons. Peut-être au sein d'un matériau ferromagnétique le champ B_0 pourrait atteindre de telles valeurs.

Références

→ *Relativité,* A. Einstein, 1916. Vulgarisation.
Ouvrage de référence facile à lire.

→ *Leçons de physique,* R. Feynman, 1963. Vulgarisation.
Lecture agréable.

→ *Relativité,* M. Boratav, R. Kerner, 1991. La relativité restreinte expliquée par Achille et la Tortue ! Licence.

→ *Relativité restreinte. Bases et applications.* C. Semay, B. Silvestre-Brac, 2005. Ouvrage complet qui aborde les voyages spatiaux. Niveau Licence.

→ *Physique Théorique, Théorie des champs*. L. Landau, E. Lifchitz, 1949. Une référence claire et complète. Master.

→ *Relativité générale.* A. Barrau, J. Grain, 2011. Du sens donné aux équations. Master.

→ *Relativité et gravitation.* P. Tourrenc, 1992. Profondeur théorique et expérimentale. Master.

→ *Relativité.* H. Lumbroso, 1979. Une mine d'exercices de relativité restreinte résolus. Licence.

Articles et documents dans ce dossier :
www.voyagepourproxima.fr/docs/

Logiciels : Tous les logiciels utilisés sont libres et gratuits.

Traitement de texte et tableur : *LibreOffice.*
Graphisme : *Gimp*, *Inkskape* et *Blender*.
Système d'exploitation : *Ubuntu*.
Programmation en *php* sur serveur *Linux*.

Index

Aberration de la lumière.....**84,** 101
Accélérateur de particules.....294, 330
Accélération de Coriolis.....113
Additivité des vitesses.....67, 284
Albert Einstein.....4, 167, 420
Alembertien.....249
Alignements des planètes.....321
Angle d'une ligne d'univers.....42
Angle solide.....91, 106, **169**
Annihilation.....124, 225, 294
Antimatière.....124, 292, **293,** 320
Antiparticule.....124
Antiproton.....125, 226, **294,** 330, 495
Apesanteur..114, 158, 167, 385, 476, 488
Appel au secours.....46
Arche.....281
Ariane.....477
Ascenseur d'Einstein.....167
Ascension droite.....323
Assistance gravitationnelle.....282
Atome excité.....148
Aurores polaires.....296
Balance à atomes.....148
Barnard.....25, 307, 482
Bergson Henri.....17
Big Bang.....5
Big-bang.....329
Biot et Savart.....262
Bord de l'Univers.....141
Bouclier.....127, 476
Boussole.....149
Ceinture d'antiprotons.....295
Ceinture de Van Allen.....296
Champ électromagnétique.....252
Changement de référentiel.....49
Chiralité.....78
Choc.....225, 284
Chute libre.....158, **160,** 230, 385, 487
Collision.….225, 248, 271, 294, 330, 449
Comburant.....282
Communications interstellaires.....45
Composition des vitesses 59, 66, 101, **362**
Condensateur.....253
Connexion.....232
Conservat. de la q. de mvt...289, 358, 473
Conservation.....225
Conservation de l'énergie.....147
Contraction des longueurs.....12, 65
Contravariante.....176, 200
Convention d'Einstein.....175
Coordonnées écliptiques.....313, 328
Coordonnées équatoriales.....323
Coordonnées polaires.....233
Coordonnées sphériques.....169
Coriolis.....113, 153, 229
Corps noir.....93
Courbure gaussienne.....248
Covariante.....176, 200
Création de paires.....248, 294, 330
Cristal d'horloges.....6, 15
Critère de rigidité.....150
Débit d'ergols.....474
Déclinaison.....323
Demie-vie.....28
Dérivée covariante.....233
Détection d'exoplanètes.....98
Développement limité.....29, 356
Diagramme d'une collision.....271, 422
Diagramme de Minkowski.....36
Diagramme non-inertiel.....396
Diagrammes d'espace-temps.....35
Dilatation du temps.....11, 65
Dipôle magnétique.....332
Dirac Paul.....293
Disque.....149, 244 sv
Distance minimale d'approche.....324

Divergence....256
Droite....137, 139, 143
Écliptique....170, 312, 451, 482
Effet de fronde....457
Effet de miroir....332
Effet de perspective spatiotemporel....14
Effet Doppler....14, **76,** 98, 131, 322, **377**
Effet Oberth....319, 449
Effet Sagnac....149
Effets métriques....230
Ellipse....99, 310
Ellipse de transfert d'Hohmann....311
Elon Musk....303
Émission spontanée....96, 148
Énergie chimique....292
Énergie d'interaction....267
Énergie de liaison....148
Énergie de masse....**220,** 292
Énergie nucléaire....292
Éphémérides....321
Équation d'Alembert....249
Équation de conservation de Lagrange 388
Équation de Lagrange....386
Équation de propagation....249
Équation de Schrödinger....250
Équation des lignes d'univers....41
Équations de Maxwell....255
Équivalence masse-énergie....219
Ergol....282
Espace vectoriel....173
Espace-temps plat....152
Événement....36
Exolune....25
Expérience des jumeaux....17, 40
Facteur d'échelle....43
Facteur gamma....11
Faisceau homocinétique....254
Falcon....477
Famille libre....174
Feu....95, 113 sv, 230
Fission....292
Flèche du temps....54, 457
Flux d'antimatière....305
Force de freinage....267
Force de Lorentz....228, 266
Force standard....223
Forces d'inertie....4, 113, 230, 235, 237
Forme bilinéaire....175
Formule de Larmor....267
Formules de Kepler....310, 312
Fronde....283
Fullerène....301
Fusée à antimatière....125
Fusée photonique....124, 320
Fusion....292
Gaia....322
Genre....66, 186
Géodésique....143, 234
Gradient....256
Gyromètre....149
Hafele et Keating....20
Héliopause....280
Hélium antiprotonique....299
Hipparcos....322
Horizon....121, 156
Horloge atomique....20, 29
Hyperbole....187, 310
Hyperbole osculatrice....213
Hyperbole tangente....217
Hypersphère....141
Hypoténuse....11
Hypothèse de l'horloge....19, 30, 112
Impulsion....220
Intelligence artificielle....281
Intensité....185, 192
Intervalle d'espace-temps....65
Invariance de jauge....258
Invariant de Lorentz....65
Invariants de Lorentz....253
Jules Verne....17
Lagrangien....161, 238
Langevin....17

Laplacien.....249
Laser.....95 sv, 149, 303
Lien de cause à effet.....54
Ligne d'univers.....35
Ligne de champ.....263, 331
Loi de Coulomb.....262
Loi de Kepler.....99
Loi de l'astronautique.....289, 474
Loi de Newton.....4, 113, 223, 256, 431
Loi de probabilité.....104
Luminance.....93, 108
Lux.....93
Magnéton de Bohr 334
Magnétosphère.....295, 331
Magnitude.....102, 192
Marée.....329, **487**
Masse de l'Univers.....291
Mélasse optique.....96
Méthode d'Euler.....315
Méthode de Runge-Kutta.....315
Métrique.....135
Métrique de Rindler.....159
Métrique minkowskienne.....173
Milieu interstellaire.....127, 280, 476
Minkowski Hermann.....187, 228
Miroir.....124, 332, 503
Modèle planétaire de Rutherford.....267
Moment cinétique.....310, 447, 467
Moteur-Fusée.....127
Mouvement des étoiles.....322
Mouvement hélicoïdal.....330
Mouvement propre.....326
Muon.....28, 302
Muonium.....302
Nanotube.....301
Neutrino.....125
Neutron.....302
Norme.....178
Ordre chronologique.....57
Parabole.....120, 124, 310, 386, 391, 406
Paradoxe d'Ehrenfest.....151, 420
Paradoxe d'Olbers.....239
Paradoxe des jumeaux.....17
Période synodique.....321
Pesanteur artificielle.....114, 152, 167
Piège de Penning.....298, 333 sv
Pile à radioisotope.....280
Positron.....125, 225, **293**
Positronium.....302
Postulats d'Einstein.....4
Postulats d'Euclide.....138
Potentiels de Liénard-Wiechert.....264
Potentiels retardés.....268
Pression de radiation.....95 sv, 127
Principe d'équivalence.....157 sv
Principe de causalité.....54, 208
Principe de l'action et de la réaction...266
Produit scalaire.....175
Propergol.....282
Proximium.....127, 299 sv
Pseudo-norme.....185
Puissance....103, 178, 222, 224, 253, 490
Puissance lumineuse.....95, 108, 357
Puissance rayonnée.....266
Quadriforce.....221
Quadriforce de freinage.....268
Quadripotentiel.....268
Quadrivecteur.....173
Quadrivecteur accélération.....212
Quadrivecteur énergie-impulsion.....220
Quadrivitesse.....206
Quantique.....250, 267, 293
Quasar.....5
Rapidité.....159
Rayon de courbure.....248
Rayon de Schwarzschild.....156
Rayon gamma.....127, 225
Rayonnement.....264
Rayonnement cosmique.....28, 295, 330
Rayonnement fossile.....7
Redshift.....158
Référentiel accéléré.....111

Référentiel barycentrique.....98, 248, 473
Référentiel cosmologique.....7
Référentiel d'inertie 4
Référentiel galiléen.....4
Référentiel géocentrique.....29
Référentiel stationnaire.....247
Référentiel synchrone.....246
Refroidissement Doppler.....97
Règle mobile.....100
Relation de Chasles.....174
Relation fond. de la dynamique...112, 222
Relativité générale en champ faible.....31
RK4.....317
Rotation spatio-temporelle.....16
Rotationnel.....256
Satellite.....322
Satellite basse altitude.....5, 29
Saturn V.....127, 477
Scalaire de Kretschmann.....417
Sérendipité.....299
Simultanéité.....52
Singularité essentielle.....417
Spectre du corps noir.....93
Spectromètre.....322
Spin.....334
StarShip.....477
Station spatiale internationale29, 156, 487
Survol propulsé.....319
Symbole de Kronecker.....176
Tachion.....208
Teegarden.....482
Télescope.....15, 23, 45, 51, 53, 348
Temps propre.....9, 19, 66
Temps relatif.....9
Temps-lumière.....1
Tenseur.....173
Tenseur de courbure de Riemann201, 243
Tenseur métrique.....175
Tenseur unitaire antisymétrique.....253
Théorème de la puissance cinétique....178
Théorème de Pythagore.....21, 192
Théorème du moment cinétique.....178
Tour du monde.....30
Train à grande vitesse.....29
Trans. de l'accélération. 69, 101, 113, **365**
Transformation de Galilée.....64
Transformation de Lorentz.....61
Transformation des angles.....23
Transformation des volumes.....22
Transformation du champ.....**427,** 432
Triangle des accélérations.....213
Triangle des forces.....222
Triangle des temps.....8, 188
Triangle Énergie-Impulsion.....221
Triangle isocèle.....190
Triangle rectangle.....11, 190, 192
Trigonométrie.....105, 446
Trigonométrie hyperbolique.....159
Troisième postulat de la rel. restreinte. .20
Trou noir.....156, 164
Trou noir primordial.....329
Unité astronomique.....283
Unités.....1, 273
Vaisseau ensemenceur.....280
Vaisseau générationnel.....280
Vecteurs orthogonaux.....177, 179, **187**
Vitesse coordonnée.....164
Vitesse covariante.....208
Vitesse de la lumière dans le vide.....1
Vitesse radiale.....322
Vitesses tangentielles.....323
Voie Lactée.....278
Voile.....95
Voyage à accélération variable.....476
Weyl Hermann.....17

Du même auteur :

Voyage pour Proxima

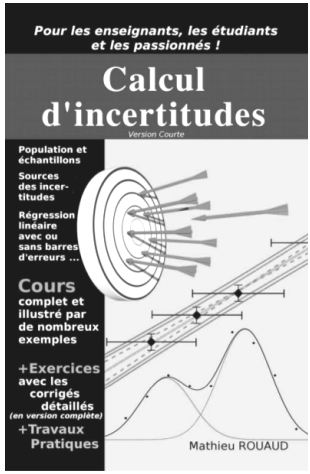
Comprendre Einstein plus vite que la lumière !

Un livre de vulgarisation pour tous les curieux de science. Ouvrage pédagogique et abondamment illustré. Les secrets de la dilatation du temps et de la structure de l'espace sont mis en lumière de manière originale, complète et sans la moindre équation. Ce livre à la main, partez à l'aventure et rejoignez les étoiles !

Ouvrage disponible sur Amazon

Calcul d'incertitudes

Ce livre s'adresse à tout public intéressé par les sciences expérimentales et les mathématiques. Les statistiques et les sondages sont très présents dans notre société et le champ d'application se veut le plus large possible. Nous souhaitons dépasser l'approche purement théorique pour que l'expérimentateur trouve tous les outils nécessaires à des calculs d'incertitudes simples et rigoureux.



En effet, la science s'efforce de lier les phénomènes naturels à une logique mathématique. Cette quête d'une vérité et d'une cohérence globale nécessite d'exercer un esprit critique qui s'appuie sur des mesures accompagnées de leurs incertitudes

Ouvrage disponible sur lulu.com

RELATIVITÉ RESTREINTE

Approche géométrique

Cours et exercices corrigés

Une approche moderne et visuelle. Moderne, car détachée du biais historique de la lumière pour embrasser le regard plus large des symétries. Visuelle, car emprunte d'une pédagogie qui accompagne l'apprenant en développant une intuition construite sur des images. L'auteur s'évertue à décomposer les phases d'apprentissage en éléments simples et assimilables. À quoi bon paraître intelligent si l'on n'est pas compris ? De nombreux exemples et exercices pleinement corrigés vous guiderons sur cette voie. La relativité restreinte a un nom bien mal choisi, c'est une magnifique théorie, et bien plus, une réalité extrêmement fertile pour notre compréhension de l'Univers.

MATHIEU ROUAUD
Professeur agrégé de physique en prépa
Diplômé de physique théorique

ISBN 9782954930923

creative commons

24 € www.lulu.com